Pubblicazione bimestrale
Spedizione in abbonamento postale
GRUPPO IV
Serie V
Volume 50

4-5
Ottobre
1974

Periodico di matematiche

organo della

mathesis

società italiana di scienze matematiche e fisiche

direttore:
bruno de finetti
segretario di redazione:
bruno rizzi

tipografia
raffaello luciani
roma

Enrico Bompiani

MATEMATICA E ARTE

E', questo, il manoscritto inedito, ritrovato ora dallo stesso Bompiani, di una conferenza da lui tenuta, non ricorda dove e quando. Ma è sempre attuale, ed è perfettamente in linea con l'indirizzo del nostro Periodico, dove ci è particolarmente gradito pubblicarla anche quale partecipazione alle onoranze che gli vengono meritatamente tributate nella prossima ricorrenza del suo 85° compleanno (1).

Parte Prima

Creazione matematica e creazione artistica

L'esistenza di legami fra il pensiero matematico e il pensiero filosofico (che furono illustrati, tra gli altri, dal mio collega prof. Conforto) è facilmente intuibile, poiché l'uno e l'altro si servono del ragionamento che è necessariamente lo stesso, qualunque sia l'oggetto a cui si applica.

Meno evidenti sono invece i legami fra il pensiero matematico ed altre forme di attività intellettuale, quali quelle che intervengono nella creazione dell'opera artistica, cioè la fantasia e l'intuizione.

Forse l'accostamento fra matematica ed arte può sembrarvi artificioso: ciò dipende dal fatto che mentre l'arte, per il tramite dei sensi, raggiunge la grandissima maggioranza de-

(1) Tra l'altro, un fascicolo del *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* sarà dedicato a lavori offerti per la ricorrenza in onore di Bompiani. Un articolo riguardante la didattica (del Calcolo delle probabilità) che figurerà ivi è « Il buon senso e la foglia di fico » di B. de Finetti.

gli individui e la fa partecipe dell'emozione di chi la crea, la matematica, che dai sensi astrae e che ha bisogno di un suo particolare linguaggio per esprimersi, non raggiunge che pochi individui, e le stesse reazioni di questi rimangono ignote ai piú.

Eppure, nonostante le contrarie apparenze, esiste una sostanziale unità fra il pensiero creativo matematico e quello artistico. Questa è la mia convinzione di cui vorrei farvi partecipi.

E mi propongo di far ciò esaminando prima, vorrei dire in astratto, i caratteri comuni alla creazione matematica e a quella artistica; e poi esaminando in concreto il tessuto matematico, spesso nascosto ma nondimeno dominante, dell'opera artistica sia essa musica, poesia, pittura o architettura.

Io credo che per poter intendere questi legami e creare l'atmosfera adatta alla valutazione di essi sia opportuno chiarire anzitutto che cosa vada inteso per « matematica » o forse meglio, per evitare definizioni astratte, che cosa *non* vada inteso per matematica: ciò è necessario per sgombrare la mente da accezioni troppo utilitarie della matematica al livello delle quali non è possibile scorgere, poiché di fatto non esistono, legami con l'arte.

* * *

E' inevitabile che, parlando di matematica ad un pubblico di persone colte ma non specializzate in essa, il pensiero di chi ascolta vada, con un certo fastidio, all'insegnamento della matematica da tutti ricevuto nella scuola media; insegnamento nel quale l'accento è posto *non* sul valore logico costruttivo dei ragionamenti e sulla loro conclusa armonia, bensí sul valore pratico dei risultati. Al futuro professionista come alla futura massaia occorrerà pure far di conto!

Allo stesso apprezzamento utilitario della matematica porta lo straordinario sviluppo della tecnica, particolarmente accentuatosi negli ultimi decenni. Non occorre avere conoscenze specifiche per rendersi conto del ruolo essenziale della matematica nelle audacie costruttive che vediamo affermarsi sotto i nostri occhi. Le enormi costruzioni statiche, come i grattacieli o il Washington Bridge a New York, le supercostruzioni navali, gli aeroplani a reazione e a velocità supersonica, il radar, la televisione richiedono, com'è di conoscenza comune, un enorme lavoro di calcolo: sicché è naturale che all'uomo della strada la matematica appaia inscindibilmente confusa con le sue applicazioni e che solo in funzione di queste abbia giustificazione e diritto di esistenza. In breve: la matematica apparisce come il servo-motore della civiltà tecnica di cui viviamo.

Va anzi affermandosi nell'opinione comune un apprezzamento ancor piú radicale nei riguardi della matematica. Poiché — si dice — esistono ormai macchine calcolatrici capaci di eseguire in pochi minuti operazioni a cui non basterebbe la vita di un uomo, macchine dotate di una « memoria » fantastica a cui nessun uomo potrebbe aspirare, non c'è piú bisogno dello sforzo matematico del cervello umano. L'uomo matematico diverrebbe nel futuro un essere paleozoico non piú necessario; esso sarebbe ridotto alla umile funzione di servo alimentatore della macchina che farebbe da servo-motore della civiltà tecnica.

Credo di non sbagliare affermando che questa è l'opinione dei piú, accecati dal bagliore delle conquiste tecniche.

Ma anche ad un livello piú elevato si afferma l'apprezzamento utilitario della matematica in ragione del suo successo a sussidio delle altre scienze. E' appena necessario ricordare in *Astronomia* la previsione dell'esistenza di Nettuno, osservata poi da Leverrier; in *Ottica* la previsione fatta da W.R. Hamilton della rifrazione conica interna dei cristalli, poi controllata sperimentalmente; in *Fisica nucleare* l'equivalenza fra massa ed energia scoperta da Einstein senza la quale la bomba atomica non sarebbe stata nemmeno pensabile.

Per quanto grandi siano i successi o servizi resi dalla matematica sia alle altre scienze sia alla tecnica, essi *non* costituiscono ancora la matematica: ne sono piuttosto un sottoprodotto, pure apprezzabilissimo, ma incapace di fecondare lo sviluppo del pensiero; la sopravalutazione di questi sottoprodotti porterebbe all'inaridimento di tutte le scienze.

Si badi che non voglio dire con ciò che le varie scienze e la tecnica non possano suggerire utili problemi alla speculazione matematica; anzi è storicamente vero il contrario, ma *la matematica comincia dove cessa l'interesse utilitario del problema.*

Rifacciamoci appunto alla storia: l'aritmetica sarebbe cominciata, secondo Erodoto, presso i Fenici in relazione ai loro scambi commerciali, e la geometria presso gli Egiziani in relazione alle necessità catastali (e di qui il nome greco di geometria = misurazione della terra).

Ricerche piuttosto recenti hanno dimostrato che già prima dei Fenici e degli Egiziani, circa 3.000 anni a.C., i Sumeri mossi da bisogni analoghi, avevano cominciato a costruire aritmetica e geometria.

Ma queste speculazioni utilitarie non sono ancora matematica. Essa acquista questo nome con Pitagora (VI sec. a.C.) che ne definisce il carattere di « scienza razionale »; e nel V sec. a.C., dopo lo splendore dell'età di Pericle, Platone è in grado di porre in esplicito rilievo la distinzione, cui sopra accennavo, fra la ricerca disinteressata e i suoi moventi materiali.

Egli scrive: « Solo fra i popoli piú evoluti si sveglia l'amore della conoscenza; ma è ancora soffocato dalla cupidigia della ricchezza presso i Fenici e gli Egiziani ».

E nella Repubblica parlando dell'educazione da dare ai reggitori della città dice che ad essi deve insegnarsi la scienza dei numeri « non alla volgare maniera occupandosene a scopo di compravendita come mercanti e rivenditori, ma in guisa che l'intelligenza loro possa *contemplare* la natura dei numeri », poiché questo insegnamento « innalza l'anima e la obbliga a ragionare intorno ai numeri considerati in sé, non accettando di ragionare se altri ricorra a numeri associati a corpi visibili e tangibili ».

E della geometria dice Platone che « questa scienza è tutto il contrario di quanto parrebbe dalla terminologia usata da coloro che la professano. E' una terminologia troppo ridicola e misera; poiché, quasi si trattasse di pratica e di scopo pratico, essi parlano sempre di quadrare, di prolungare una retta, di aggiungere, e di altre operazioni simili. *Mentre invece tutta la scienza si coltiva a scopo di conoscere* ».

Anzi Platone va piú in là: dopo aver affermato che l'unico scopo della scienza è la conoscenza, egli afferma che l'unica vera scienza è la matematica perché è l'unica capace di arrivare a conclusioni certe, mentre alle altre scienze non è concesso che raggiungere conclusioni verosimili, cioè giudicare dalle apparenze.

Nelle parole di Platone è il suggello del « miracolo greco »: quello che per altri popoli era stato uno sforzo frammentario a scopo puramente utilitario si libera con i Greci da ogni interesse materiale: essi scoprono l'interesse della ricerca della verità per se stessa, nella libertà della sua costruzione, nella contemplazione delle sue armonie.

E' in questa accezione platonica della matematica, la sola accettabile da chi la coltivi, nettamente separata dalle sue applicazioni utilitarie, che si svelano i legami con l'arte (*).

E sono appunto questi che ora vogliamo esaminare insieme.

Un primo carattere comune alla costruzione matematica e a quella artistica è l'assoluta libertà e il disinteresse di ambedue.

Sul disinteresse ho già detto nell'indicare ciò che *non* deve intendersi per matematica, d'accordo col pensiero di Platone: ed è chiaro che lo stesso disinteresse vale per la costruzione artistica.

Per la libertà: essa è ovvia se s'intende la libertà sia del matematico che dell'artista di scegliere liberamente l'oggetto delle proprie ricerche secondo la commozione del suo animo.

Ma la libertà del matematico ha un senso piú profondo che forse sfugge ai piú. Si è abituati a pensare alla matematica (da chi non la coltiva) come ad un sistema rigido di sillogismi le cui conclusioni s'incatenano con una fatalità necessaria a cui è impossibile sottrarsi. E questo è vero se ci si riferisce allo sviluppo logico dei ragionamenti. Ma la libertà essenziale è nella scelta, del tutto arbitraria purché non contraddittoria, dei *postulati* cioè delle relazioni che si pongono

---

(*) N.d.R. - Questa contrapposizione cosí radicale, derivante dalla distinzione dell'aristocratico « otium » dal plebeo « negotium », appare oggi eccessiva e inopportuna. Teoria pura e applicazioni sono due facce complementari e necessarie della matematica e di ogni scienza. La presente nota è stata aggiunta d'accordo con l'A. che condivide in argomento la linea del PdM.

fra gli elementi indefiniti ai quali si applica il procedimento logico.

Tutti hanno sentito parlare di geometria euclidea e di geometria non-euclidea , di meccanica galileiana e di meccanica relativistica e tutti sanno che le due alternative in ciascun caso conducono a conclusioni differenti.

Se la matematica fosse quel sistema rigido che generalmente si pensa le due alternative non potrebbero sussistere, le conclusioni opposte non potrebbero essere tutt'e due vere e bisognerebbe optare o per una o per l'altra. Ma ciò non è affatto: l'opzione non va esercitata sulle conclusioni, necessarie, ma nella scelta dei postulati; è questa la libertà fondamentale nella costruzione matematica.

L'esempio della geometria euclidea (e cosí quello della meccanica galileiana) mi dà occasione a porre in rilievo un altro carattere comune alla matematica e all'arte: cioè la loro permanenza nello spazio e nel tempo che si potrebbe esprimere con le parole latine « ubique et semper ».

Una statua di Fidia o una tragedia di Sofocle, la Divina Commedia o le « stanze » di Raffaello o una sinfonia di Beethoven hanno un valore universale nello spazio e nel tempo: sono opere che hanno commosso che commuovono e commuoveranno milioni di uomini di qualsiasi parte del mondo.

Ogni vera opera d'arte che attinga i vertici della bellezza ha questi caratteri di permanenza nello spazio e nel tempo.

Lo stesso è vero delle grandi costruzioni matematiche. La geometria euclidea, quale s'insegna nelle scuole di tutto il mondo, è sostanzialmente quella che Euclide codificò nel IV sec. a.C.; i tre secoli di vita della meccanica di Galileo e di Newton sono i primi di una serie che immancabilmente seguiranno.

E' un fatto curioso che questo carattere di permanenza nel tempo, che attesta la perfezione dell'opera compiuta, carattere che è comunemente apprezzato per l'opera artistica, divenga invece nei riguardi della matematica un attributo di inferiorità.

Per chiarire il mio pensiero mi servirò ancora dell'esempio della geometria euclidea. Si dice: poiché da oltre venti secoli s'insegna sempre la geometria euclidea, o l'algebra elementare, vuol dire che la matematica è ormai un ramo morto della scienza, che non ha piú una parola nuova da dire.

Questo giudizio negativo trova alimento e conferma, nell'opinione dei piú, dal confronto della matematica con le altre scienze. Infatti p. es. nella fisica non s'insegna piú l'« horror vacui » o la teoria del « flogisto » né si ricorre piú all'« etere » con le sue proprietà paradossali: a queste spiegazioni artificiose, provvisorie, si sono sostituite spiegazioni piú adeguate dei fenomeni. Cosí nell'astronomia non si parla piú del sistema geocentrico e dei cieli come appariscono nella Divina Commedia, ma si studiano i movimenti dei corpi celesti secondo la meccanica newtoniana (o relativistica) e s'indaga la natura di questi con l'astrofisica.

La conclusione che ne trae è che mentre la fisica e l'astronomia, e cosí le altre scienze, hanno progredito la matematica è rimasta ferma alle posizioni già raggiunte da oltre venti secoli.

La conclusione è speciosa ed evidentemente falsa. Nelle scienze diverse dalla matematica ogni nuova acquisizione modifica le conclusioni precedenti ed è proprio la caducità delle nozioni già acquisite rispetto ai fatti nuovi che obbliga ad una revisione continua anche nell'insegnamento.

In matematica invece qualsiasi nuova acquisizione non può modificare la validità delle conclusioni già raggiunte (per il fatto che queste sono logicamente esatte o vere). Un allargamento delle ipotesi, cioè un'attenuazione dei postulati che stanno a base della costruzione, può condurre e conduce a risultati piú generali comprendenti i precedenti, ma non può mai condurre a rivedere o rinnegare i risultati già acquisiti.

Cosí, in relazione all'esempio scelto della geometria euclidea, le geometrie non-euclidee sviluppatesi nei sec. XVIII-XIX non contraddicono la geometria euclidea — che quindi rimane a base dell'insegnamento della geometria — ma la ampliano in un sistema piú vasto che la contiene come caso particolare. Analogamente il principio di relatività galileiano non è che una parte del piú comprensivo principio di relatività di Einstein.

E poiché è pur necessario cominciare nell'insegnamento dai casi piú semplici (e già sufficienti per la schematizzazione del maggior numero dei fenomeni coi quali abbiamo da fare) restano e resteranno nell'insegnamento la geometria euclidea e la meccanica newtoniana. Ma questo fatto non indica in alcun modo l'inaridimento o la sterilità della matematica. Al contrario esso tiene solo ad uno dei suoi caratteri piú elevati, alla permanenza delle sue conquiste, carattere che la matematica ha in comune con la vera arte.

* * *

Piú profondi intimi legami fra la matematica e l'arte si rivelano nell'atto creativo dell'una e dell'altra. So che è difficile farvi partecipi dell'entusiasmo che accompagna la ricerca matematica, della gioia della contemplazione di una nuova armonia che si disvela al pensiero; lo so, e sarei tentato di dire con Dante

... che intender non la può
chi non la prova.

Mi ci proverò cercando di esporvi il processo di una ricerca matematica. Anche nel raffigurarsi questo processo credo che l'opinione comune sia molto lontano dal vero. Credo infatti che si pensi al matematico come ad un arido fabbricatore di sillogismi, solo attento al processo logico della sua costruzione.

Nulla è piú lontano dal vero: io credo che nessuna ricerca matematica sia nata in questo modo né alcun risultato sia stato raggiunto per questa via. L'elemento essenziale nella ricerca matematica, come in quella artistica, per quanto vi possa sembrare strano, non è la logica ma la fantasia e l'intuizione.

Già lo stesso movente di una ricerca è un fatto emotivo (e non logico). Essa nasce dalla contemplazione (come del resto diceva Platone) di armonie già raggiunte. E come per un musicista una nota o per un pittore una linea o un tocco di luce lo commuovono e ne accendono la fantasia fino a determinare il bisogno di esprimere nuovi aggruppamenti di suoni o di linee e di luci, cosí per il matematico la bellezza di un ragionamento o la singolarità di un risultato ne accendono la fantasia, suscitano l'improvviso desiderio di saggiare in altre circostanze la potenza di quel ragionamento o di incastonare la preziosità di questo risultato in una serie di gemme minori che ne pongano in risalto la luce.

Si tratta in ogni caso di una commozione estetica che sgancia, per cosí dire, il processo creativo: chi non è capace di questa commozione estetica non può essere né matematico né artista.

Quanto si è detto vale per il momento in cui il problema si pone come un bisogno dello spirito. Si potrebbe credere che da questo momento l'elaborazione di esso fino a trovarne la soluzione fosse affidata puramente alla logica.

Ma anche questo non è. Se non soccorre la fantasia nel suggerire una possibile via d'attacco, se non soccorre l'intuizione nel presentare un probabile risultato, non c'è nulla da fare: lo strumento logico, con le infinite combinazioni cui può dar luogo, assomiglia alla macchina descritta nei viaggi di Gulliver che con tutte le possibili combinazioni di caratteri dovrebbe esser capace di generare automaticamente tutti i capolavori della letteratura.

Con ciò non si vuole gettare discredito sul valore della logica: ma questo sarebbe praticamente nullo se un'intuizione precedente del risultato non ne limitasse al minimo numero i tentativi.

E ciò è tanto vero che spesso questo lavoro preliminare della mente si svolge in modo del tutto incontrollato nella zona del subcosciente. Accade che sforzi di dimostrazione rimasti infruttuosi per giorni o mesi od anche anni vengono fecondati da un'intuizione improvvisa che ne illumina il valore ed apre la via al successo. Questo processo è stato descritto molto bene da Poincaré nei riguardi della sua scoperta delle funzioni fuchsiane.

Se si analizzano le circostanze in cui si produce questa intuizione subitanea si riconosce in esse l'intervento del motivo estetico. E' una mancanza di armonia in qualche parte della costruzione già fatta che suggerisce un tentativo fruttuoso: o addirittura un desiderio imperioso del bello che impone il risultato. Non è infrequente fra matematici interessati ad una ricerca sentir dire: « sarebbe bello che fosse cosí »; cioè il risultato è sentito anzitutto come soddisfacimento di un bisogno estetico.

Alla certezza estetica del risultato si applica allora la logica per svelare i legami necessari con le premesse e poterli comunicare ad altri; ma l'atto creativo per cui si divina il risultato è, come quello dell'artista, puramente emotivo fantastico intuitivo.

Un altro carattere comune all'opera del matematico e a quella dell'artista è l'astrazione.

Il musicista che vuol rendere il mormorio della foresta non riproduce i suoni o i rumori che sente, ma astrae da varie circostanze di fatto e dà forma propria alle sensazioni che riceve creando l'opera d'arte.

Cosí il pittore non riproduce il paesaggio con la precisione di una macchina fotografica, ma facendo astrazione da mille dettagli, ne fissa il contenuto emotivo. secondo la propria interpretazione, nella sua opera.

Non dissimile è il modo di procedere del matematico. Come nasce e che cosa è la geometria euclidea che già ho avuto occasione di ricordare?

Essa non è altro che la descrizione delle esperienze piú comuni, quelle del movimento di corpi rigidi. Questa descrizione avviene prescindendo, o astraendo da molteplici circostanze particolari, quali la forma del corpo, il suo colore, la sostanza di cui è formato, l'imperfetta rigidità di esso e astraendo altresí da ogni nozione relativa al tempo in cui il movimento si svolge ed alle forze che lo hanno causato. Questa è la geometria euclidea che, come vedete, astrae da una quantità di circostanze che pure in concreto debbono presentarsi perché un movimento abbia luogo.

Euclide ha colto questo aspetto del movimento, che noi chiamiamo *geometria* (euclidea).

Non è detto che altri aspetti non possano anche considerarsi: se si tiene conto anche del tempo in cui il movimento si svolge (ma non delle forze che lo determinano) si ha la *cinematica*; e se si tiene conto sia del tempo che delle forze si ha la *dinamica*; ma anche in queste descrizioni si astrae da una quantità di circostanze sopra elencate che debbono pur presentarsi in un moto concreto.

Se mi permettete, vorrei approfittare dell'esempio della geometria euclidea per mostrarvi come l'astrazione procede in matematica.

La geometria euclidea, permette, appunto con i movimenti, di confrontare due figure ad una distanza qualsiasi una dall'altra: e due figure si dicono uguali se è possibile sovrapporre l'una all'altra con un movimento; e se non lo sono si potranno sempre confrontare sovrapponendone alcuni punti con un movimento.

Nella prima metà del secolo scorso si andava affermando la convinzione, specialmente in seguito alle esperienze di Faraday sull'elettricità, che non esistessero « azioni a distanza », cioè che qualsiasi azione fisica per cosí dire nascente in un punto dello spazio non potesse rivelarsi in un altro punto qualsiasi senza passare per i punti intermedi.

Occorreva il genio di B. Riemann per trarre da questa veduta fisica una completa rivoluzione nel campo della geometria (cioè astraendo del tutto dai fenomeni fisici che stavano a base di quella veduta).

Come nella fisica occorre e basta conoscere la legge elementare con cui un fenomeno si propaga da un punto ad uno infinitamente vicino (e non a distanza finita), non è possibile immaginare una geometria di un continuo (non necessariamente uno spazio euclideo) assegnando in ogni punto di esso e per una celletta infinitesima che lo contenga la misura euclidea di angoli e di distanze, cioè come brevemente si dice una *metrica,* con le condizioni che metriche relative a punti molto vicini siano anche esse fra loro molto vicine, cioè molto poco differenti?

Ciò è possibile: e questo aggregato di infinite cellette in ciascuna delle quali vale la metrica euclidea è qualche cosa di enormemente diverso dal comune spazio euclideo. Nasce cosí, con un colpo di genio, la geometria riemanniana che comprende in sé sia quella euclidea che quelle non-euclidee. Una semplice astrazione, cioè l'abbandono della esigenza di confrontare grandezze a distanza, dà origine ad una geometria molto piú vasta e comprensiva di tutte quelle note.

La geniale opera di Riemann ha come presupposto quella di Gauss: il quale, perfettamente sicuro della possibilità logica delle geometrie non-euclidee, si era domandato se nell'universo fisico non valesse una di queste geometrie (la decisione doveva risultare dalla somma degli angoli di un triangolo).

Per raggiungere questo scopo Gauss aveva creato dal nulla la geometria delle superficie curve, primo esempio di un continuo su cui vale appunto una geometria riemanniana. Conscio del valore della sua costruzione egli chiude la sua memoria con i versi virgiliani:

Tantae molis erat
Romanam condere gentem!

Cosí Riemann con spirito veramente profetico, che sembra presentire la teoria della relatività, conclude il suo lavoro ammonendo che occorre preparare schemi mentali abbastanza ampi perché essi siano capaci di comprendere la realtà fisica che forse ci sfugge per la ristrettezza degli schemi adoperati.

Lo stesso pensiero aveva espresso, nella nobiltà della forma latina, il Jacobi:

« Omnia preparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quasi necessitate coacta, emergit; praeparatis omnibus, causa levissima accidens, quamvis remota quaestio physica eam elicere valet ».

Affinché la verità nuova presentita da Riemannn venisse alla luce occorreva ancora che Minkowski, astraendo anche qui dalle apparenze o dai sensi, unificasse le nozioni di spazio e di tempo nel cronotopo, in cui vale una metrica quasi-euclidea, e che Einstein con un altro tratto di genio vedesse nella metrica riemanniana del cronotopo la possibilità di unificare gravitazione ed inerzia facendole apparire come proprietà geometriche del cronotopo stesso, conseguenze della metrica adottata.

Il bisogno — estetico anzi tutto — di includere in una teoria unitaria anche i fenomeni elettromagnetici induce ad un'altra revisione critica degli schemi adottati. Non è forse lo schema stesso di Riemann, per quanto enormemente piú ampio dei precedenti, troppo ristretto per comprendere la realtà fisica?

E allora si riconosce che non è già proprio la metrica riemanniana l'essenziale che occorre, ma il *trasporto* di vettori messo per primo in evidenza da Levi-Civita, gioca il ruolo essenziale.

Con una nuova astrazione si riconosce che i caratteri essenziali di questo trasporto si conservano in altri schemi molto piú generali: nasce cosí la *geometria degli spazi a connessione* che ha dominato tanta parte della matematica e della fisica-matematica dell'ultimo trentennio e che è ancora in fase di sviluppo.

Il leit-motif del confronto, proposto da Euclide nella forma piú immediata risultante dalla considerazione del movimento, si ripresenta nei successivi sviluppi con variazioni e ampliamenti, dovuti a successive astrazioni, fino a dominare e raccogliere in sé tutta la potenza dell'ondata creativa.

E' una gioia estetica pura quella che si prova nel contemplare questa continua ascesa del pensiero verso forme sempre piú astratte: gioia non dissimile da quella di un alpinista che, raggiunta una vetta dominante, dalla apparentemente eterna immobilità di ghiacciai veda snodarsi i primi spumeggianti rivoletti e questi scendere e gonfiarsi per le valli che sembrano farsi incontro ad essi a proteggerli con la loro vegetazione perché la linfa vitale possa giungere a fecondare la campagna sottostante.

Tale è il valore dell'astrazione in matematica: quanto piú essa domina dall'alto, tanto piú estesi sono i campi che essa riesce a fecondare e tanto piú intensa è la soddisfazione — estetica prima che economica — di vedere derivare da un unico principio le piú ricche conseguenze.

E se per avventura accadrà ad un ricercatore di raggiungere una di queste vette dominanti, da cui si dispiega e chiarisce un vasto panorama, egli si sentirà avvolto dalla stessa mistica commozione che fece esclamare a Galileo, dopo aver puntato per la prima volta il suo canocchiale verso il cielo: « Signore io Ti ringrazio per aver concesso a me, primo fra gli uomini, di contemplare queste meraviglie ».

tori messo per primo in evidenza da Levi-Civita, gioca il ruolo essenziale.

Con una nuova astrazione si riconosce che i caratteri essenziali di questo trasporto si conservano in altri schemi molto piú generali: nasce cosí la *geometria degli spazi a connessione* che ha dominato tanta parte della matematica e della fisica-matematica dell'ultimo trentennio e che è ancora in fase di sviluppo.

Il leit-motif del confronto, proposto da Euclide nella forma piú immediata risultante dalla considerazione del movimento, si ripresenta nei successivi sviluppi con variazioni e ampliamenti, dovuti a successive astrazioni, fino a dominare e raccogliere in sé tutta la potenza dell'ondata creativa.

E' una gioia estetica pura quella che si prova nel contemplare questa continua ascesa del pensiero verso forme sempre piú astratte: gioia non dissimile da quella di un alpinista che, raggiunta una vetta dominante, dalla apparentemente eterna immobilità di ghiacciai veda snodarsi i primi spumeggianti rivoletti e questi scendere e gonfiarsi per le valli che sembrano farsi incontro ad essi a proteggerli con la loro vegetazione perché la linfa vitale possa giungere a fecondare la campagna sottostante.

Tale è il valore dell'astrazione in matematica: quanto piú essa domina dall'alto, tanto piú estesi sono i campi che essa riesce a fecondare e tanto piú intensa è la soddisfazione — estetica prima che economica — di vedere derivare da un unico principio le piú ricche conseguenze.

E se per avventura accadrà ad un ricercatore di raggiungere una di queste vette dominanti, da cui si dispiega e chiarisce un vasto panorama, egli si sentirà avvolto dalla stessa mistica commozione che fece esclamare a Galileo, dopo aver puntato per la prima volta il suo canocchiale verso il cielo: « Signore io Ti ringrazio per aver concesso a me, primo fra gli uomini, di contemplare queste meraviglie ».