Zenone tra filosofia e scienza

Luca Nicotra*

Sunto: *Una rivisitazione dei famosi quattro paradossi di Zenone sul movimento, attraverso un percorso personale che, tra filosofia e scienza, pone in evidenza i numerosi concetti fondamentali della matematica e della scienza moderna che essi contengono in nuce, che saranno sviluppati nei secoli successivi all'epoca di Zenone.*

Parole Chiave: paradosso, aporia, infinito, infinitesimo, limite.

Abstract: *A review of the famous Zenone's four paradoxes on the move, through a personal path that, between philosophy and science, highlights the many fundamental concepts of mathematics tand science hat they contain in the niches and will be developed in the centuries following Zenone's era.*

Keyword: paradox, aporia, infinite, infinitesimal, limit.

Citazione: Nicotra L., *Zenone tra filosofia e scienza*, «ArteScienza», Anno IV, N. 7, pp. 5-30.

1 - I paradossi sul moto di Zenone

Un paradosso (dal greco *parà* =contro e *dòxa* =opinione) è una conclusione in contrasto con il senso comune o con la realtà fisica, che, tuttavia, è conseguenza logica di premesse plausibili, vale a dire ritenute accettabili. I paradossi non devono essere confusi con i sofismi, che sono falsi ragionamenti allo scopo di dare parvenza di necessità logica a ciò che, invece, è una propria convinzione.

Per dirla con Nietzske, ritengo che i filosofi presocratici siano ispirati più da uno spirito dionisiaco (intuitivo) che apollineo (razionale), diversamente da quelli post-socratici nei quali, al contrario, il

* Direttore responsabile di «ArteScienza», ingegnere meccanico e giornalista, Presidente dell'Associazione culturale "Arte e Scienza"; luca.nicotra1949@gmail.com.

logos, il ragionamento razionale prevale sull'intuizione, tuttavia senza pervenire a un accordo generale: ogni filosofo ha sempre rinnegato, in parte o totalmente, il pensiero dei suoi predecessori, il che fa della filosofia una disciplina non cumulativa per eccellenza. La logica, però, non dà alcuna nuova conoscenza, perché semplicemente palesa per esteso ciò che nelle premesse è già contenuto in forma occulta e sintetica (e in questo suo ufficio maieutico è insostituibile), ma le premesse sono quasi sempre frutto di un'intuizione, di processi del subconscio, che non sono logici e che portano nuova conoscenza.

Alcune fantasiose intuizioni dei filosofi presocratici sono state avvalorate dalla scienza moderna, come è accaduto alla teoria atomica genialmente intuita da Leucippo[1] e Democrito[2] 24 secoli prima che ne fosse possibile dimostrare scientificamente la fondatezza. A pensarci bene anche l'idea parmenidea dell'Essere come sfera compatta non è forse in sintonia con la teoria cosmologica del *Big-Bang*, secondo la quale l'Universo ha avuto origine dalla grande esplosione di una minuscola sfera, in cui era compattata tutta la materia attualmente sparsa negli spazi cosmici? E quella minuscola sfera iniziale non è fuori del tempo, come pensava Parmenide? Ciò che noi chiamiamo tempo inizia da quella esplosione, cioè il tempo non è "il tempo" ma "il nostro tempo". Tuttavia la sfera esisteva anche "prima"… fuori del tempo, nell'eternità.

Per la scienza moderna Parmenide ha il merito di avere stimolato le famose quattro argomentazioni di Zenone contro l'esistenza del movimento, così ricche di spunti per ulteriori sviluppi che costituiranno, molti secoli dopo, fondamentali pietre miliari del pensiero scientifico: la nascita della geometria razionale, il continuo, l'infinito, la logica, l'analisi matematica infinitesimale.

Parmenide di Elea[3] è forse il filosofo presocratico più originale. Il suo pensiero, molto probabilmente influenzato inizialmente da quello di Pitagora, essendo stato discepolo del pitagorico Ameinia

1 Leucippo (Mileto, inizio-prima metà del V secolo a.C. – terzo quarto del V secolo a.C.).

2 Democrito (Abdera, 460 a.C. – 370 a.C. circa).

3 Parmenide (Elea, 515-510?o 544-541? -450 a.C.).

di Crotone,[4] ha lasciato tracce nella filosofia di Platone. La sua identificazione del pensare con l'essere è in nuce la teoria delle idee, che successivamente Platone svilupperà.

Di Parmenide ci rimangono 154 versi, in 19 frammenti, del suo poema didascalico *Sulla Natura*, che fino al secolo VI d.C. era ancora leggibile integralmente. Parmenide si esprimeva in una forma mistico-poetica, tipica dei filosofi dell'Italia meridionale dell'antichità classica. Il suo pensiero è sintetizzabile nell'affermazione che l'Essere è uno, immobile, eterno e indivisibile. Volendo darne un'immagine, Parmenide lo rappresenta come una sfera compatta che esaurisce il tutto: fuori di essa non è concepibile null'altro, perché pensare il "non-essere" non è possibile per Parmenide, «pensare ed essere sono la stessa cosa», cioè si può pensare soltanto ciò che "è". Parmenide tenta di giustificare questi attributi con ragionamenti metafisici e per questo motivo Bertrand Russell lo considera l'inventore non tanto della logica, come pensano altri, quanto della «metafisica basata sulla logica»,[5] ma in realtà sono intuizioni che, come quasi tutte quelle dei filosofi presocratici, rimangono a prima vista molto nebulose o banali e per questo motivo si prestano a essere diversamente interpretate o derise da chi crede di poter cogliere la verità soltanto attraverso complicati ragionamenti logici o pseudo-logici.[6] È quello che accadde a Parmenide, che era fatto oggetto di derisioni dai suoi avversari, per le sue idee che negavano la molteplicità delle cose e l'esistenza del moto.

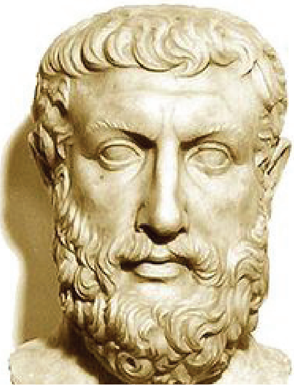


Fig. 1 - Parmenide di Elea.

4 Federigo Enriques, Giorgio de Santillana – *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Bologna, Zanichelli, 1937, p. 42.

5 Bertrand Russell – *Storia della filosofia occidentale, 1° volume: storia della filosofia greca*, Milano, Longanesi, 1966, p. 82.

6 Luciano De Crescenzo dice scherzosamente a proposito dell'Essere parmenideo: «… questa definizione io di tanto in tanto la ripeto, anche se mi rendo conto che non è molto comprensibile». (Luciano De Crescenzo, *Storia della filosofia greca, da Socrate in poi,* Milano, Arnoldo Mondadori, 1988, p.124)

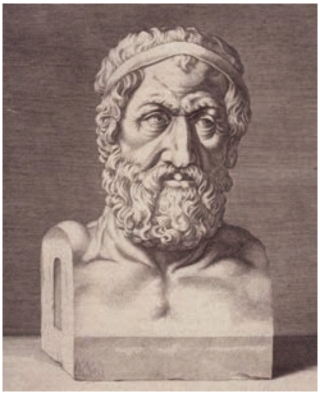


Fig. 2 - Zenone di Elea.

Al di là di qualunque apprezzamento sul suo pensiero, è indubbio che Parmenide ebbe una notevole influenza su tutta la filosofia greca e in particolare su quella di Platone che, con la sua teoria delle idee, conciliò, in parte, i punti di vista opposti dei due grandi filosofi che lo precedettero: l'immutabilità dell'Essere di Parmenide con il divenire dell'Essere di Eraclito. [7]

Il suo discepolo più brillante, Zenone di Elea,[8] ebbe la geniale idea di difendere il suo Maestro escogitando vari paradossi, che sono rimasti per secoli veri e propri rompicapo per filosofi e scienziati, dei quali sono rimasti celebri, in particolare, quattro riguardanti il movimento.[9] Con i suoi paradossi, Zenone intendeva esporre gli avversari di Parmenide a conseguenze ancora più assurde di quelle da loro rimproverate al suo Maestro, facendole derivare, con ragionamento logico, proprio da quelle stesse premesse degli «enti molti» in nome delle quali essi contestavano la dottrina parmenidea dell'«ente uno». Dal dialogo *Parmenide* di Platone:

> E Zenone:
>
> .... Il vero è che le scritture mie vogliono soccorrere alla sentenza di Parmenide, contro a coloro che sono arditi di farsi beffe di lui, spacciando che il supponimento, tutto è uno, intoppi in molte contraddizioni ridicolose. Contrasta questa scrittura mia, dunque, a quelli che dicono che è il molti, e rende loro di pari e d'avanzo; e intende ella fare ciò aperto, che il supponimento degli enti molti, in più contraddizioni ridicolose s'imbatta, che non l'altro dell'ente uno, se ci si bada. Per questa vaghezza di disputare io avea scritto il libro.[10]

7 Cfr. Luciano De Crescenzo, *op. cit*. p. 97.

8 Zenone (Elea 489 -431 a. C.). Elea era una città della Magna Grecia. Gli scavi dell'antica Helea o Velia si trovano nel comune di Ascea, località situata sulla costa tirrenica dell'attuale Campania, poco a nord di capo Palinuro.

9 Per una analisi aggiornata delle riflessioni, negli ultimi 50 anni, sui paradossi di Zenone si rimanda al libro di Vincenzo Fano, *I paradossi di Zenone*, Roma, Carocci, 2012.

10 Platone, *Dialoghi*, nella versione di Francesco Acri, a cura di Carlo Carena, Torino,

Parmenide e Zenone erano contemporanei di Socrate e di Aristotele, ma di età decrescente nell'ordine in cui sono stati elencati. Tutti e quattro sono i protagonisti di un incontro a casa di un certo Pitodoro, in occasione delle grandi feste Panatenei, quadriennali, che cadevano nel mese di luglio. L'incontro è narrato da Platone nel dialogo Parmenide:

> Adunque disse Antifonte, che gli contò Pitodoro esser venuti una volta ai Panatenei grandi Zenone e Parmenide. Parmenide era molto vecchio, tutto bianco, ma la cera l'aveva buona e bella; ed era in su i sessantacinque anni. Zenone poi era presso a quaranta anni, grande nella persona, e grazioso a vedere: e dicevasi ch'ei fosse stato molto innanzi[11] con Parmenide. Eglino si posarono a casa Pitodoro, fuor delle mura, al Ceramico;[12] e poi venne Socrate anche, e altri molti con lui, desiderosi di udir leggere le scritture di Zenone; ché ce le avean recate la prima volta allora.
>
> Socrate era assai giovine. Adunque si fu messo a leggere Zenone proprio: e Parmenide s'avvenne a essere fuori. E' ci era a leggere poco altro; ed ecco, disse Pitodoro, sopraggiugner da fuori egli, e Parmenide con lui, e Aristotele, quel che fu un dei trenta; e udiron quel poco; egli no, ché l'avea udito già altra volta Zenone.[13]

Dopo le prime due parti di dialoghi fra Socrate, Zenone e Parmenide, la terza parte dell'incontro è occupata interamente da lunghi dialoghi fra Parmenide e Aristotele.

Per i ragionamenti contenuti nei suoi paradossi (o antinomie o aporie[14]), Zenone è considerato l'iniziatore della dialettica e della

Einaudi, 1970, p. 354.

11 Amico.

12 Quartiere di Atene, delle ceramiche.

13 Platone, *Op. cit.*, p. 352.

14 I tre termini spesso sono usati come sinonimi, ma presentano in realtà delle differenze. Un'antinomia (dal greco *anti* = contro e *nómos* = norma, regola) è costituita dalla dimostrazione che sono vere sia la proposizione *A* sia la sua negazione *non-A* e pertanto, per il principio di non contraddizione, non è accettabile. Un'interessante interpretazione della definizione di antinomia è stata data da Lucio Lombardo Radice in *Istituzioni di algebra astratta* (Roma, Feltrinelli, 1965) p. 55 nota 36, affermando che «tutte le antinomie che si trovano in matematica debbano essere considerate dimostrazioni per assurdo, e precisamente dimostrazioni dell'assurdità di una delle ipotesi costituenti le premesse del ragionamento

logica, e, in particolare, secondo Giorgio Colli,[15] il padre del principio di contraddizione, normalmente, invece, attribuito ad Eraclito di Efeso da Aristotele, che così lo formula nella sua opera *Metafisica* libro IV, cap. 3, 19-20: «È impossibile che il medesimo attributo, nel medesimo tempo, appartenga e non appartenga al medesimo oggetto e nella medesima relazione».[16] In altre parole: non si può dire e disdire alcunché di qualcos'altro nel medesimo tempo e per il medesimo rispetto, perché «è impossibile, infatti, supporre che la medesima cosa sia e non-sia»[17] nello stesso tempo, potendo esserlo, invece, in tempi diversi.

I paradossi di Zenone miravano a dimostrare l'impossibilità del moto, introducendo per la prima volta un tipo di dimostrazione che sarà poi molto usato dai matematici greci e, in particolare, da Euclide: la riduzione all'assurdo, che faceva uso del principio di contraddizione e del principio del terzo escluso.[18]

---

che conduce all'antinomia».
Il termine aporia (dal greco *aporein* = essere incerto) ha il significato di "strada senza uscita'"e indica quindi la mancanza di una soluzione di un problema per il fronteggiarsi di due soluzioni contraddittorie ma ugualmente valide dal punto di vista logico. Un'aporia è quindi sia un paradosso sia un'antinomia Nel caso in cui valga il principio del terzo escluso (per una proposizione sono possibili soltanto due possibilità: o *A* o *non-A*, ovvero con espressione latina *tertium non datum* = non è concessa una terza possibilità) un'antinomia è quindi un'aporia.
Il significato di paradosso è quello già indicato all'inizio di queste pagine e risulta pertanto lievemente differente da quello di antinomia, poiché nel paradosso non si ha la 'dimostrazione' della verità sia di *A* sia di *non-A*, bensì la dimostrazione di *A* che contraddice con la proposizione *non-A*, la quale, essendo di origine sperimentale, deriva dall'esperienza fisica "comune" esprimendo, dunque, il "senso comune". Anche un paradosso, quindi, è un'aporia, non avendo una "via d'uscita".

15 Giorgio Colli - *Zenone di Elea,* Milano, Adelphi, 1998.

16 *Aristotele*, vol. 1, Milano, Mondadori, collana "I classici del pensiero", 2008, p. 750.

17 Ivi. 24-25.

18 Il principio del terzo escluso (detto anche *tertium non datum*) afferma che una proposizione *P* può essere "vera o falsa" ed è facilmente confondibile con il principio di bivalenza che caratterizza la logica bivalente che stabilisce invece che *P* è 'o vera o falsa'. In altri termini, il principio di bivalenza asserisce che il grado di verità di una proposizione può assumere uno dei due valori vero, falso, mentre il principio del terzo escluso assicura che al di fuori di questi valori non ne esistono altri. Si può dimostrare con il formalismo della logica proposizionale tradizionale che il principio del terzo escluso è 'deducibile' assumendo validi il principio di bivalenza e il principio di non-contraddizione, per cui, sotto tali ipotesi, il principio del terzo escluso è equivalente al principio di bivalenza. Questo spiega perché

La prima argomentazione di Zenone (*Dicotomia* o *Stadio 1*) afferma l'impossibilità del moto, poiché il percorso da A a B è suddivisibile successivamente e all'infinito in due metà, per il cui punto di divisione occorre sempre passare. La seconda argomentazione (*Achille e la tartruga*) tende a evidenziare ancor di più l'impossibilità del moto, dimostrando come addirittura il "piè veloce" Achille non può mai raggiungere la lenta tartaruga, qualunque sia il vantaggio iniziale concessole. La terza aporia di Zenone sul moto (*La freccia*) dimostra che una freccia in volo è in realtà ferma, mentre la quarta aporia (lo *Stadio 2*) dimostra chiaramente il concetto (per noi oggi "acquisito") di relatività del moto, facendo vedere come uno stesso corpo può avere velocità diverse se cambia il corpo cui viene riferito il suo moto.

Secondo il commentario di Proclo (410-485) al dialogo *Parmenide* di Platone, Zenone scrisse un'opera divisa in quaranta *lógoi* o argomenti, che avevano le caratteristiche del paradosso. Di essi ce ne sono pervenuti soltanto dieci, indirettamente, attraverso cinque frammenti riportati da Simplicio (VI sec. a. C.) nei suoi commentari alla *Fisica* di Aristotile. Di questi siamo qui interessati ai quattro paradossi sul moto, sui quali esiste una sterminata bibliografia. Ciò dimostra chiaramente che l'importanza di un'opera non si misura col numero di pagine.

I problemi aperti dalle argomentazioni di Zenone sul moto sono stati discussi per secoli dalle più grandi menti e sono ancora attuali, poiché riguardano concetti basilari della scienza matematica e fisica, sui quali non è stato ancora raggiunto un completo accordo fra gli studiosi. Come spesso accade per autori dell'antichità, il cui pensiero ci è pervenuto soltanto attraverso frammenti delle loro opere e testimonianze, filosofi e matematici si sono sbizzarriti a formulare ipotesi su scopi reconditi e significati non espressi dei paradossi zenoniani, oltre quelli di cui, come abbiamo visto, Platone, nel *Parmenide*, ci dà notizia per bocca di Zenone stesso:

> …le scritture mie vogliono soccorrere alla presenza di Parmenide, contro a coloro che sono arditi di farsi beffe di lui, spacciando che

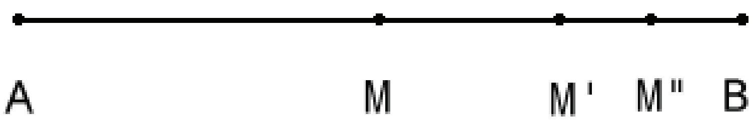
spesso sono usati come sinonimi.

il supponimento, tutto è uno, intoppi in molte contraddizioni ridicolose.[19]

Discuteremo successivamente le ipotesi riguardo ad altri scopi "non dichiarati" e le implicazioni sullo sviluppo della scienza che alcuni studiosi moderni hanno ravvisato nelle quattro aporie zenoniane sul moto.

2 - Il paradosso della *Dicotomia*

Il primo paradosso di Zenone sul moto è detto della *Dicotomia* (dal greco *dichao* = in due parti e *tomé* e quindi *témno* = io taglio),[20] perché dimostra che il moto è impossibile a causa di un processo iterativo, all'infinito, di divisione a metà del percorso da compiere. Infatti, per passare da un punto A ad un punto B occorre prima passare per il punto medio M del segmento AB,[21] quindi per il punto medio M′ del rimanente segmento MB, e poi ancora per il punto medio M′′ del segmento residuo M′B e così via, infinite volte.



In maniera simmetrica, il ragionamento può essere ripetuto considerando ogni prima metà dei segmenti: per raggiungere il punto medio M occorre prima passare per il punto medio M_1 di AM, ma

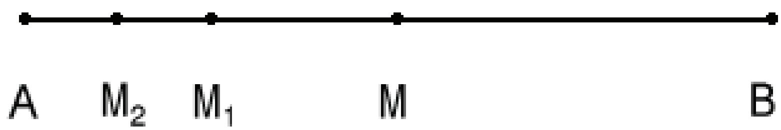
19 Platone, *Op. cit.*, p. 354..

20 In un'altra versione dei paradossi di Zenone è chiamato *Stadio,* perché il tragitto AB è identificato con quello necessario per andare da un estremo all'altro di uno stadio. Lo stesso nome identifica però anche il quarto paradosso.

21 Anche se normalmente si pensa a un segmento di retta AB, le argomentazioni di Zenone sono valide qualunque sia il tragitto AB, che più in generale si può pensare come un tratto (segmento) di curva qualsiasi.

per raggiungere M_1 occorre prima passare per il punto medio M_2 di AM_1, e così via all'infinito.

In entrambe le situazioni, a causa del ripetersi all'infinito del processo di suddivisione a metà dei successivi tratti, non si può raggiungere, secondo Zenone, il punto finale B: nel primo caso vi si avvicinerebbe sempre più senza però mai raggiungerlo, mentre nel secondo caso, addirittura, il movimento non avrebbe nemmeno inizio.



In questo paradosso Zenone dimostra l'impossibilità del moto senza prendere in considerazione alcun elemento cinematico (velocità, accelerazione) ma soltanto elementi geometrici: la conclusione di Zenone poggia sulla tacita ammissione che la somma di infiniti segmenti finiti non può essere una grandezza finita (il segmento AB).

Matematicamente, il percorso AB è esprimibile come somma di infiniti segmenti che sono l'uno la metà dell'altro e le cui misure, quindi, formano una progressione geometrica[22] di ragione *1/2.* Prendendo come unità di misura AB stesso, la misura di AB è *1* e pertanto risulta:

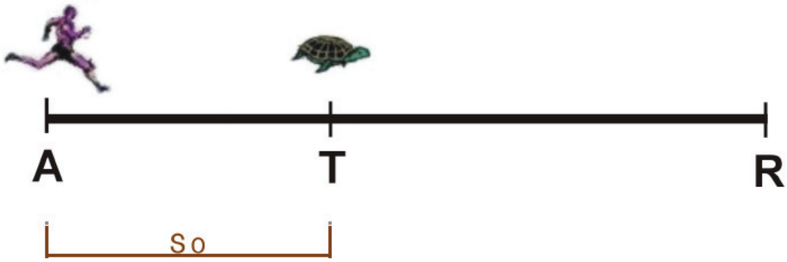
$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots\ldots \text{all'infinito.}$$

3 - Il paradosso di *Achille e la tartaruga*

L'esperienza mostra che un mobile più veloce di un altro lo raggiungerà e supererà, nel tempo, qualunque sia il vantaggio iniziale, e di ciò ne era ben consapevole anche Zenone. Un qualunque

22 Una progressione geometrica è una successione di numeri tale che è costante il rapporto fra uno di essi e il precedente.

studente di liceo saprebbe impostare molto semplicemente questo semplice problema di meccanica, riuscendo a calcolare l'istante di tempo in cui avverrà il "sorpasso". Per semplicità supponiamo che i due corridori si muovano con velocità costanti e ovviamente diverse. Allora, se v_A è la velocità di Achille e v_T quella della tartaruga ed s_0 il vantaggio iniziale dato alla tartaruga,basta scrivere le equazioni orarie che esprimono lo spazio percorso dai due corridori con le rispettive velocità ed eguagliarli, per ottenere l'istante di tempo in cui Achille raggiungerà la tartaruga.



Infatti se cominciamo a contare il tempo dall'istante in cui iniziano a correre i due contendenti e misurare gli spazi dalla posizione da fermo di Achille, lo spazio percorso da Achille all'istante t sarà $v_A t$, mentre quello della tartaruga sarà $v_T t$. Allora Achille raggiungerà la tartaruga nell'istante t^* in cui avrà percorso il vantaggio iniziale s_0 più lo spazio $v_T t^*$ percorso dalla tartaruga: $s_0 + v_T t^*$. Ma tale spazio è esprimibile anche come $v_A t^*$. Quindi possiamo scrivere:

$$v_A t^* = s_0 + v_T t^*$$

da cui:

$$t^* = s_0 / (v_A - v_T).$$

Da tale formuletta si ricava che il tempo t^* dopo il quale Achille raggiungerà la tartaruga è tanto più lungo quanto maggiore è il vantaggio iniziale s_0 e minore la differenza fra le velocità dei due corridori $v_A - v_T$. Tutto ciò corrisponde al senso comune. Se il vantaggio iniziale fosse nullo Achille si troverebbe nella stessa posizione della tartaruga fin dall'istante iniziale, come è ovvio ($t^*= 0$), mentre se la velocità di Achille fosse uguale a quella della tartaruga e il vantaggio iniziale diverso da zero, Achille non raggiungerebbe mai la tartaruga perché t^* tenderebbe a infinito (una frazione con il numeratore non nullo e il denominatore nullo tende a infinito). Tutto quindi si svolgerebbe secondo l'esperienza comune e il paradosso non esisterebbe.

E allora come si spiega la conclusione di Zenone, logicamente ineccepibile ma contraddittoria rispetto all'esperienza, secondo cui Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga, alla quale concede ovviamente un vantaggio iniziale? Lo possiamo capire seguendo il particolare ragionamento di Zenone, logicamente corretto in relazione alle tacite premesse da cui si sviluppa, per cui costituisce un paradosso e non un sofisma. Ripercorriamolo assieme.

A differenza dell'impostazione "fisica" precedente, seguiamo ora un ragionamento prevalentemente "matematico".

Con le stesse scelte di prima per l'origine dei tempi e degli spazi, e le medesime notazioni per le velocità, matematicamente la corsa di Achille e della tartaruga è esprimibile in questi termini.

Siano A e T i punti di inizio della corsa rispettivamente di Achille e della tartaruga, mentre R sia il punto in cui Achille dovrebbe raggiungere la tartaruga. In un qualsiasi istante t Achille percorre lo spazio $s_A= v_A\, t$, mentre la tartaruga lo spazio $s_T = v_T\, t$. Quindi il rapporto fra le loro velocità è uguale al rapporto fra gli spazi percorsi $v_T/v_A = s_T/s_A = a$ (a reale < 1 essendo $v_T < v_A$), e lo spazio percorso nel tempo t dalla lenta tartaruga sarà $s_T = a\, s_A$, vale a dire una frazione a di quello percorso nello stesso tempo da Achille. Allora, quando Achille percorre il vantaggio iniziale AT (la cui misura è s_0), nello stesso intervallo di tempo la tartaruga avrà percorso lo spazio as_0, e quando Achille avrà anche lui percorso tale spazio, la tartaruga a sua volta avrà percorso lo spazio $a(as_0)=a^2s_0$, e quando Achille avrà guadagnato anche tale spazio, la tartaruga avrà coperto l'altro $a(a^2s_0) = a^3s_0$, e così via all'infinito. Dunque, Achille per raggiungere la tartaruga dovrebbe percorrere lo spazio:

$$s_0 + as_0 + a^2s_0 + a^3s_0+ \ldots. + a^ns_0 + \ldots = s_0\, (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n + \ldots.).$$

Gli addendi entro la parentesi, come nel caso del paradosso *Dicotomia*, formano una progressione geometrica, questa volta di ragione a anziché *1/2*. Il paradosso di *Achille e la tartaruga* è quindi una generalizzazione del precedente.

La somma "indicata" degli infiniti termini contenuti entro la parentesi è una serie geometrica che, come si dimostra in Analisi Infinitesimale, ha come valore o, più correttamente, converge a $1/(1-a)$. Dunque lo spazio percorso da Achille per raggiungere la tartaruga è AR = $s_0/(1-a)$.

Alla stessa conclusione si può giungere più facilmente con le seguenti considerazioni.

Lo spazio percorso da Achille dall'inizio della corsa fino al raggiungimento della tartaruga è AR = AT + TR, essendo AT il vantaggio iniziale concesso da Achille alla tartaruga e TR lo spazio percorso dalla tartaruga fino al punto in cui Achille dovrebbe raggiungerla; esso è percorso nello stesso tempo t^* impiegato dalla tartaruga per portarsi dalla posizione iniziale T a quella finale R. Pertanto, è:

$$\mathrm{TR} = v_T\, t^* \;,\ \mathrm{AR} = v_A\, t^*$$

da cui

$$\mathrm{TR}/\mathrm{AR} = v_T / v_A = a \;,\ \mathrm{TR} = a\ \mathrm{AR}$$

e quindi:

$$\mathrm{AR} = \mathrm{AT} + a\ \mathrm{AR},\quad \mathrm{AT} = (1-a)\ \mathrm{AR}$$

e infine AR = AT/ $(1-a)$ ovvero, considerando le misure (quella di AT è s_0), si ha infine: AR = $s_0/(1-a)$.

In sostanza nella *Dicotomia* e nell'*Achille* di Zenone è possibile ravvisare la polemica parmenidea contro la molteplicità delle cose, a favore dell'uno continuo e indivisibile, mostrando quali conclusioni assurde derivano dall'ammettere un continuo composto di un numero infinito di parti. Giustamente Bertrand Russell osservò[23] che Zenone ha affrontato, nei suoi paradossi sul moto, i problemi degli infinitesimi, dell'infinito e della continuità, tutti fra loro in-

23 Bertrand Russell - *La matematica e la metafisica* (1901), in *Misticismo e logica*, Milano, Longanesi, 1970, p.77.

timamente connessi, in quanto relazionati al concetto di quantità. Questa la laconica giustificazione data da Zenone alla conclusione del paradosso dell'*Achille*:

> La più lenta non sarà mai oltrepassata dal più veloce, perché prima di oltrepassarla l'inseguitore dovrà raggiungere il punto da cui la fuggitiva è partita, onde la più lenta, per necessità, dovrà sempre essere in testa.

Una spiegazione logico-matematica molto chiara del perché, secondo Zenone, Achille non può raggiungere mai la tartaruga è stata data, ponendo in evidenza le premesse sottaciute del ragionamento di Zenone, da Bertrand Russell,[24] traendola da un articolo del Noël (*Le mouvement et les arguments de Zenon d'Elée*, Revue de Métaphysique et de Morale, vol. I, pp. 107-125). Russell afferma che Zenone ragionava correttamente, perché deduceva l'unica conclusione possibile dalle premesse contenute tacitamente nel suo paradosso, che possono essere così espresse:

1. un segmento di retta contiene un numero infinito di punti (punto senza estensione);
2. in ogni istante Achille è in un luogo (o punto) e la tartaruga è in un luogo;
3. durante la corsa, sia Achille sia la tartaruga non si trovano mai due volte nello stesso luogo;
4. un insieme (anche di infiniti elementi) contiene più elementi di una sua parte.

Da tali premesse discendono le seguenti conclusioni:

- il numero di luoghi raggiunti da Achille è uguale al numero di luoghi raggiunti dalla tartaruga, perché, in conseguenza dei punti precedenti 2 e 3, gli istanti di tempo che compongono la loro corsa sono in corrispondenza biunivoca con i luoghi da loro occupati;

24 Bertrand Russell - *I Principi della Matematica*. Roma, Newton Compton, 1971, p. 529.

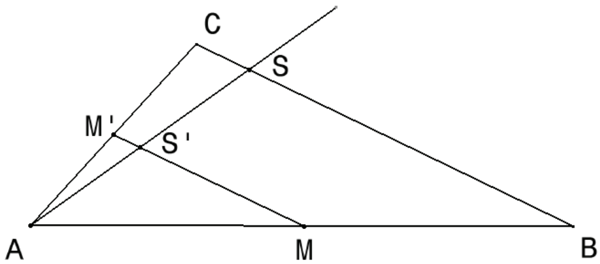
- Achille non può raggiungere la tartaruga perché, invece, in tal caso occuperebbe, durante la corsa, un numero di luoghi maggiore di quelli occupati dalla tartaruga (il tratto AR che Achille dovrebbe percorrere contiene come sua parte il tratto TR percorso dalla tartaruga).

Dunque la conclusione, contrastante con l'esperienza, che Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga non è un errore del ragionamento di Zenone, ma è una conseguenza necessaria dell'aver esteso agli insiemi infiniti l'assioma euclideo, valido per quelli finiti, che la parte è minore del tutto.

La soluzione oggi appare ai matematici molto semplice, ma in realtà è il frutto tormentato di un atto di estremo coraggio quale fu quello compiuto dai due grandi matematici tedeschi Julius Wilhelm Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845–1918) nei riguardi dell'infinito.

Fin dagli antichi greci, l'infinito in matematica aveva dato luogo a vari paradossi. Galileo Galilei, in particolare, aveva messo in evidenza, con esempi sia geometrici sia numerici, che gli elementi di un insieme infinito possono essere posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un altro insieme infinito contenuto nel primo (un suo sottoinsieme). Poiché la corrispondenza biunivoca fra due insiemi esprime in maniera rigorosa la proprietà dei due insiemi di possedere lo stesso numero di elementi (si dice che i due insiemi sono 'simili' o 'equipotenti'), le dimostrazioni galileiane portavano al paradosso che un insieme infinito contiene lo stesso numero di elementi di un altro insieme infinito che è una sua parte e che, pertanto, dovrebbe essere "minore", secondo l'assioma di Euclide: la "parte" è minore del "tutto".

Un esempio geometrico è costituito da due segmenti l'uno di lunghezza doppia dell'altro, fra i cui punti può essere tuttavia posta una corrispondenza biunivoca. Ciò accade se in un triangolo ABC si traccia il segmento congiungente i punti medi M, M' dei due lati AB, AC. Il segmento MM', per la similitudine dei due triangoli AMM', ABC, è la metà di BC, di cui risulta omologo. Ma se dal vertice A si tracciano le infinite rette AS'S che intercettano i segmenti MM' e BC rispettivamente nei punti S', S, tutti i punti di BC risultano posti in corrispondenza biunivoca con i punti di MM'.



Galilei prospetta una situazione analoga in campo numerico, considerando gli infiniti numeri naturali (1,2,3,….) e i loro infiniti quadrati. Ad ogni numero naturale si può far corrispondere il suo quadrato e viceversa:

1, 2 ,3 , 4, 5, 6,...............
1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

Pertanto l'insieme degli infiniti numeri naturali contiene lo stesso numero di numeri dell'insieme dei numeri quadrati, che è evidentemente una sua parte.

Dedekind e Cantor risolsero tali paradossi dell'infinito, come si suol dire, "ribaltando" il tavolo, cioè negando per gli insiemi infiniti l'assioma che la parte è minore del tutto. Essi presero atto del fatto che la negazione di tale assioma eliminava quei paradossi ed era una proprietà "caratteristica" degli insiemi infiniti, cioè una proprietà di cui godono tutti e soltanto gli insiemi infiniti e che quindi può essere assunta come loro definizione: un insieme infinito è un insieme che ha altrettanti elementi di una sua parte.[25] Con tale definizione essi

25 I matematici dicono: un insieme è infinito se ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme.

introdussero in matematica il concetto d'infinito attuale o completo, diverso dal concetto di infinito potenziale o incompleto, qual era quello prima accettato fin dai tempi di Aristotile: un procedimento iterativo senza fine.

La conclusione paradossale dell'*Achille* mostrava due problemi fondamentali.

Il primo è l'inconsistenza dell'antica concezione pitagorica granulare della retta, costituita da punti materiali (o monadi) di estensione piccola ma finita. Infatti, la scoperta delle grandezze incommensurabili, avvenuta, secondo una certa tradizione, proprio in seno alla scuola pitagorica probabilmente nel V a. C.,[26] aveva mostrato a quali contraddizioni conduceva la concezione granulare della retta. Due grandezze fra loro incommensurabili non ammettono alcun sottomultiplo comune, ma secondo la antica concezione pitagorica della retta, non dovrebbero esistere grandezze incommensurabili, essendo la monade, nel peggiore dei casi, il sottomultiplo comune di tutte le grandezze. Come taluni hanno ravvisato (Paul Tannery,[27] Federigo Enriques[28]) l'*Achille* di Zenone avrebbe infierito con altre argomentazioni sulla moribonda concezione granulare della retta, figlia della monade pitagorica, favorendo l'introduzione del concetto di punto ideale, immateriale e privo di estensione. In tal senso l'*Achille* è stato ravvisato come un "manifesto" *ante litteram* della geometria razionale o geometria degli enti ideali. Infatti, esso evidenzia che la continuità della retta (concepita come un "molteplice") implica un

26 Non si hanno notizie certe né sul particolare problema che portò alla scoperta delle grandezze incommensurabili né sul periodo storico in cui tale scoperta avvenne. Secondo la tradizione, avvalorata da Aristotele, basata su quanto riferito da Platone nel suo dialogo *Menone*, la prima coppia di grandezze incommensurabili sarebbe costituita dal diametro e il lato di un quadrato ovvero dall'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele. il cui rapporto è il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Invece, secondo gli orientamenti più attuali degli storici della matematica (Carl B. Boyer, *Storia della Matematica, Milano,* Mondadori, 1990, pp. 85-88), la prima coppia di grandezze incommensurabili fu probabilmente la diagonale e il lato di un pentagono regolare, scoperta ad opera di Ippaso o Ipparco di Metaponto, vissuto nell'Italia Meridionale intorno al 400 a.C. Una delle ipotesi dell'espulsione di Ippaso dalla scuola pitagorica è proprio la divulgazione che fece di tale scoperta.

27 Cfr. Carl B. Boyer, *Op. cit.*, p.88.

28 Cfr. Federigo Enriques, Giorgio de Santillana – *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Bologna, Zanichelli, 1937, p. 52.

procedimento d'inserimento di un nuovo punto fra due punti che si reitera all'infinito e che, al pari dell'esistenza delle grandezze inco,mmensurabili, porta a negare la monade pitagorica, perché concepirebbe una grandezza continua finita composta da un numero infinito di quantità discrete o finite, e che pertanto risulterebbe d'estensione infinita, giungendo ad un'evidente contraddizione. Secondo tale concezione, il segmento AR sarebbe di lunghezza infinita e quindi Achille non potrebbe mai raggiungere la tartaruga. Poiché, in realtà, Achille raggiunge la tartaruga, l'ipotesi del continuo composto da un numero infinito di monadi deve essere scartata.

Il secondo problema è che il paradosso dell'*Achille* rimarrebbe irrisolto anche considerando la retta formata da infiniti punti ideali, per due ragioni.

La prima, già esaminata, è la tacita estensione al caso degli insiemi infiniti dell'assioma euclideo secondo cui un insieme è numericamente maggiore di una sua parte, che, invece, è accettabile soltanto per gli insiemi finiti.

La seconda ragione consiste nel fatto che un segmento di retta, concepito come risultante di un numero infinito di elementi privi di estensione (i punti ideali), sarebbe esso stesso nullo. Quest'ultimo problema è stato "aggirato" in matematica con l'analisi infinitesimale, considerando il segmento come somma di un numero infinito di segmenti di lunghezza sempre più piccola, ma mai nulla, ovvero introducendo il concetto di "infinitesimo".

Dice Bruno de Finetti in *Matematica Logico-Intuitiva*:[29]

> …il sofisma[30] di Zenone (sec.V a.C.), secondo la critica moderna, doveva segnare il raggiungimento della consapevolezza che la somma d'infiniti termini positivi può essere convergente, riducendo all'assurdo precedenti concezioni in contrasto con tale risultato.

29 Roma, Edizioni Cremonese, 1957 pag 327.

30 De Finetti usa qui il termine "sofisma" considerando la fallacia della conclusione del ragionamento di Zenone rispetto all'esperienza. Ma, come già detto, tale ragionamento è invece corretto dal punto di vista logico, perché trae dalle sue premesse l'unica conclusione logicamente necessaria. Il termine esatto, dunque, è: paradosso o aporia.

Occorre una spiegazione per il lettore comune: una somma di infiniti termini positivi (serie) si dice convergente se è finita; le «precedenti concezioni in contrasto con tale risultato» sono evidentemente la concezione granulare della retta che, come abbiamo già visto, porterebbe alla conclusione opposta, della divergenza di una somma di infiniti termini positivi. Sapendo di esprimerci in maniera non rigorosa, possiamo dire, per intenderci, che una somma di infiniti termini positivi è divergente se è "infinita". Ma come è possibile che sommando infiniti termini positivi si ottenga una quantità finita e non infinita? È possibile proprio grazie agli infinitesimi.

Cerchiamo di spiegarlo. Abbiamo già dimostrato che Achille, per raggiungere la tartaruga, dovrà percorrere uno spazio che misura $s_0 /(1-a)$ e che è somma di infiniti termini positivi che "diventano sempre più piccoli". L'analisi infinitesimale ha risolto tale problema "inventando" il concetto di infinitesimo: grandezza che tende ad annichilirsi, senza però mai riuscirvi. Infatti, l'unica possibilità per pensare una quantità finita composta di infiniti termini positivi è ricorrere, ma invertendo il senso, allo stesso processo mentale dell'infinito potenziale. Questo può essere pensato come il risultato di una reiterazione che ad una data grandezza fa "sempre" seguire un'altra più grande e che quindi non ha termine: è l' "infinitamente grande". L'infinitesimo è anch'esso il risultato di una reiterazione che, però, ad una data grandezza fa "sempre" seguire un'altra più piccola: è, dunque, l' "infinitamente piccolo". In entrambi i casi non si raggiunge mai una grandezza, l'infinito o l'infinitesimo, perché questa ci sfugge "sempre in avanti" (accrescimento) o "sempre indietro" (rimpicciolimento). C'è, tuttavia, una differenza fra l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo. Mentre il primo processo non ha un limite finito, ed è quindi più facilmente accettabile dalla nostra mente come un processo di accrescimento che non si arresta mai, il secondo lo ha: è lo zero. Per tale motivo, a rigore, è errata la denominazione, pur diffusa, di "infinitamente piccolo" per l'infinitesimo. È arduo per la mente umana pensare di poter rimpicciolire infinite volte qualcosa, senza mai arrivare ad azzerarla. Ma qui entra in gioco un altro concetto fondamentale dell'analisi infinitesimale: il concetto di limite.

Il paradosso dell'*Achille,* ponendoci di fronte alla consapevolezza che il percorso che l'eroe acheo deve compiere per raggiungere la lenta testuggine è composto di infiniti termini positivi sempre più piccoli e che, per realizzare tale impresa, si avvicina sempre più alla fuggitiva senza però mai raggiungerla, ci pone di fronte oltre che ai concetti di infinito, di infinitesimo e di continuità (come già rilevato da Russell) anche a quello di limite, cioè ci pone di fronte a tutti i concetti fondamentali sui quali si fonda l'analisi matematica infinitesimale, di cui, dunque, Zenone può essere considerato, a buon titolo, il "padre putativo".

Il paradosso dell'*Achille e la tartaruga* è oggi risolto, tuttavia la sua formulazione è stata enormemente utile, sia per i numerosi problemi e concetti latenti che contiene - di alcuni dei quali si è già discusso, riservandoci di accennare ad altri ancora, in chiusura di questo scritto - sia perché offre lo spunto per mostrare come si possa ottenere un risultato matematico non banale – la somma di una serie numerica geometrica - tramite un semplice modello fisico, costituito, nella fattispecie, dalla cinematica del moto uniforme, che non richiede l'uso del calcolo infinitesimale.

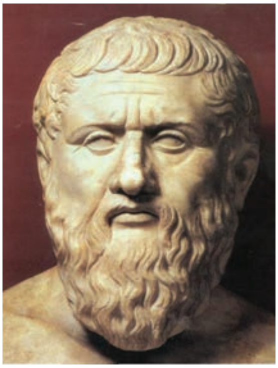


Fig. 3 - Platone.

Con i due paradossi sul moto della *Dicotomia* e dell'*Achille*, Zenone contesta pienamente la concezione di un continuo spaziale composto di molteplici elementi, fossero essi di dimensioni finite (monade pitagorica) o privi di dimensioni (punto ideale), affermando quindi come vera l'ipotesi contraria di un continuo compatto e indivisibile, sostenuta dal suo maestro Parmenide.

Tuttavia c'è una bellissima risposta di Parmenide ad Aristotele, nel dialogo di Platone, che lascia molto perplessi: «E però l'uno, è uno e molti, e tutto e parti, e terminato e interminato di moltitudine».[31] Presa in sé non è forse una ammissione che il tutto, pur essendo finito, è costituito da infinite parti?

31 Platone, *Op. cit.,* p. 380.

4 - Il paradosso dalla *Freccia*

Zenone estende la sua polemica, contro «quelli che dicono che è il molti», dal campo spaziale, trattato nella *Dicotomia* e nell'*Achille*, a quello temporale, che affronta nel cosiddetto paradosso della *Freccia*, dimostrando che anche il tempo deve essere concepito come un continuo compatto, intero, indivisibile, perché se, al contrario, fosse costituito da una molteplicità di istanti - o tempuscoli elementari, come diremmo oggi – una freccia lanciata in aria starebbe sempre ferma.

Secondo il ragionamento di Zenone, la freccia occupa in ogni istante uno e un sol punto nello spazio,[32] rispetto al quale risulta essere ferma, non cambiando posizione rispetto ad esso. A chi obietta che in ciascun istante la freccia si muove, Zenone risponde che allora ognuno di quegli istanti deve essere diviso in altri istanti. Infatti, se la freccia in un istante si muove, vuol dire che ha cambiato posizione nello spazio, ma a questa nuova posizione deve corrispondere un altro istante, perché i punti della sua traiettoria spaziale sono in corrispondenza biunivoca con gli istanti temporali. Dunque, si conclude che la freccia sarebbe immobile nel punto di partenza. Se, poi, ci si ostinasse a considerare la durata del volo della freccia costituita da una moltitudine di istanti in ciascuno dei quali la freccia è ferma, si concluderebbe ancora una volta che essa rimane immobile durante tutto il tempo del suo volo, essendo il suo moto formato dalla somma di infiniti stati di quiete. Si ripresenta una situazione analoga a quella di un segmento finito pensato come somma di infiniti punti ideali, ovvero privi di dimensioni: esso sarebbe di lunghezza nulla, perché aggiungendo al nulla il nulla non si può ottenere una grandezza non nulla!

Ancora una volta, Zenone, dimostra impeccabilmente ai suoi

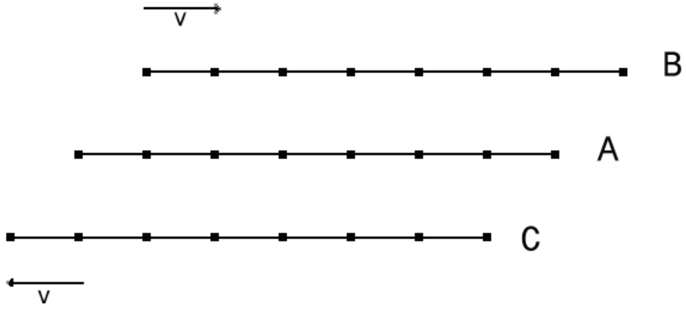
32 La freccia, non avendo il dono dell'ubiquità, in ogni istante deve trovarsi in un sol luogo. Inoltre, istanti e punti spaziali sono fra loro in corrispondenza biunivoca per la stessa freccia: infatti, uno stesso punto può essere occupato in istanti diversi ma da frecce diverse. Ovviamente anche una medesima freccia potrebbe (teoricamente) occupare lo stesso punto dello spazio in istanti diversi, ma questo accadrebbe soltanto nel caso che la sua traiettoria formasse un cappio, eventualità ovviamente esclusa nel lancio di una freccia: nemmeno Robin Hood vi riuscirebbe!

avversari che la loro ipotesi di un continuo "frazionabile" è contraddittoria rispetto alla realtà fisica anche nel dominio del tempo.

5 - Il paradosso dello *Stadio*

Il quarto e ultimo paradosso sul moto, detto *Stadio*, differisce notevolmente dai precedenti per il tipo di argomentazioni usate da Zenone a favore dell'unità, dell'identità a se stesso e dell'immobilità dell'Essere, qualità che non si accordavano con le idee, sostenute dagli avversari di Parmenide, di una realtà costituita dal divenire delle cose, dalla loro molteplicità e dell'idea del continuo come insieme di parti discrete separate dal vuoto, che ne permetteva il movimento. Ma Parmenide identificava l'Essere con il "pieno e l'esteso" e il Non-Essere con il "vuoto e il non-esteso", e non essendo per lui concepibile il Non-essere - perché nel momento in cui lo penso "è" e quindi non può essere e non essere contemporaneamente - non lo era neppure il vuoto. Di conseguenza il movimento, che ha bisogno del vuoto e che implica un mutamento, per Parmenide è un'apparenza, soltanto un'illusione.

Questa è proprio la tesi che vuol dimostrare Zenone nel suo ultimo paradosso sul moto, prospettando agli avversari del Maestro sostanzialmente questa situazione, che ha come ipotesi ancora una volta le loro stesse idee: delle tre file di masse A1, A2, A3,…B1, B2, B3,….C1, C2, C3….disposte fra loro a distanze uguali, la fila A di mezzo è considerata immobile, mentre le file B e C si muovono con



velocità *v*, ma in versi opposti rispetto alla fila A.

Zenone chiede quale sia la velocità di una massa della serie C: è *v* o forse *2v*? La risposta per noi, oggi, è semplice, quasi ovvia: la velocità delle masse C è v se riferita alle masse A, mentre è *2v* se riferita alle masse della serie B, poiché queste si muovono con la stessa velocità scalare *v* di C ma in verso opposto. Per noi moderni, educati già nel nostro DNA ad accettare l'idea che tutti i moti sono "realmente" relativi, lo *Stadio* non costituisce più un paradosso, perché sappiamo bene che non è in contrasto con la realtà fisica affermare che uno stesso corpo, nello stesso istante, può avere velocità diverse o addirittura essere fermo. Sappiamo, infatti, che non si può parlare della velocità di un corpo in senso assoluto, ma soltanto e sempre della sua velocità rispetto a un altro corpo, ovverossia sappiamo che tutti i moti sono relativi. Il relativismo del moto è considerato, nella scienza attuale, reale e non apparente.[33] Dello stesso paradosso si può avere una versione equivalente considerando anziché le velocità i tempi. Aristotile rimprovera a Zenone di confondere il moto assoluto - cioè rispetto a corpi in quiete - con i moti relativi, che sono quelli rispetto ad altri corpi in moto e che certamente sono da considerarsi – secondo lui - apparenti. Ma quali sono i corpi in quiete? Questo punto di vista che distingue fra moti assoluti e reali, da una parte, e moti relativi e apparenti dall'altra, ovviamente richiedeva l'ammissione di uno spazio assoluto in quiete assoluta, ovvero il cui stato di moto o di quiete non fosse riferibile ad altro. Soltanto rispetto a tale spazio ha senso, *sic et simpliciter*, parlare di corpi in quiete. Tale concezione si

33 Nella meccanica galileo-newtoniana, invece, si postulava l'esistenza di uno spazio assoluto identificato con lo spazio solidale con le cosiddette stelle fisse. Per cui si considerava assoluto un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse. I moti erano considerati reali assoluti se riferiti a tale sistema e reali relativi se riferiti a un qualunque altro sistema in moto rettilineo uniforme (cioè con velocità costante) rispetto al sistema assoluto, mentre erano considerati apparenti quelli riferiti agli altri sistemi. Oggi, in meccanica, soltanto convenzionalmente si continua a chiamare assoluto il sistema di riferimento solidale con le stelle fisse e assoluti i moti e le sue caratteristiche cinematiche ad esso riferiti. Peraltro la moderna astronomia, avendo riconosciuto l'esistenza di moti relativi anche fra le cosiddette stelle fisse, ha precisato con considerazioni di media statistica la definizione del "sistema universale assoluto". La particolarità di tale sistema (al di là del riconoscimento che in realtà non esiste uno spazio in quiete assoluta) è la validità, finora mai smentita dall'esperienza, della forma $F = ma$ del secondo principio della dinamica. (Cfr. Carlo Cattaneo, *Lezioni di meccanica razionale*, Pisa, Libreria Scientifica Giordano Pellegrini, 1970, p. 168).

protrarrà nei secoli fino a Newton, Galilei e oltre. Soltanto nel primo Novecento, con l'affermazione della Teoria della Relatività di Albert Einstein, la scienza ufficialmente accetterà l'idea che tutti i moti sono relativi (idea peraltro genialmente intuita già da Niccolò Cusano nel sec. XV e da Giordano Bruno nel sec. XVI), essendo stato dimostrato che non esiste uno spazio assoluto.

Il paradosso dello *Stadio* è troppo enigmatico, nella sua ermeticità, per poter trarre qualche giudizio circostanziato su di esso. In sostanza Zenone si limita a porre in evidenza il carattere relativo del moto ed è questa l'unica conclusione valida che siamo autorizzati a trarre.

Cos'altro voleva dire? Non che tutti i moti sono relativi, perché Zenone non esprime nessuna osservazione critica sul significato da dare alla quiete della fila A di punti. A rigor di logica non è nemmeno efficacemente evidenziata l'apparenza del moto: più efficace sarebbe stato aggiungere una quarta fila di punti in moto con la stessa velocità (scalare) e nello stesso verso di C e far rilevare che essa risulta in moto rispetto ad A e a B (con velocità diverse) ma ferma rispetto a C. Considerando, tuttavia, che Zenone vuol difendere il pensiero del Maestro, credo che non sia una forzatura ritenere che il suo scopo era dimostrare non tanto la relatività del moto, quanto la sua "apparenza" nel mondo del sensibile e la sua non esistenza nel mondo della ragione. I moti sono relativi ma anche apparenti nelle «opinioni dei mortali, che errano lontano dalla vera fede», cioè dalla ragione, come dice Parmenide nel suo poema *Sulla Natura*. Le «Parole dell'Opinione» sono le esperienze sensoriali, ingannevoli, alle quali si contrappongono le «Parole della Verità» ovvero le conclusioni della ragione. Parmenide e Zenone riconoscevano, dunque, il moto dei singoli corpi che, però, in quanto relativi ed esperibili attraverso i sensi sono illusori. Negano, invece, l'esistenza del moto dell'universo nella sua interezza, cioè dell'Essere, in quanto - dice Parmenide - «Lo stesso e nello stesso rimanendo è in quiete rispetto a se stesso, e in tal guisa è anche immobile». In altri termini, se l'Essere non ha altro da sé cui possa essere riferito non può che essere «in quiete rispetto a se stesso». Ma, in tal caso non avrebbe senso nemmeno attribuire all'Essere lo stato di quiete, che implicherebbe un riferimento esterno e quindi un 'altro da sé', che invece non esiste. Dunque, l'Essere di

Parmenide "è" semplicemente.

6 - Zenone lo ha detto o non lo ha detto?

Un'indebita presunzione – a mio avviso – è l'atteggiamento, molto diffuso, di voler attribuire ai paradossi di Zenone sul moto altre intenzioni, se non quella da lui stesso dichiarata e riferita da Platone nel *Parmenide*: dimostrare come «il supponimento degli enti molti, in più contraddizioni ridicolose s'imbatta, che non l'altro dell'ente uno».[34]

La polemica di Zenone, dunque, non riguarda direttamente il moto, come troppo spesso erroneamente si sente affermare, bensì la "molteplicità" degli enti sostenuta dagli avversari di Parmenide. Zenone non dichiara di voler negare l'esistenza del moto, ma, al contrario, semplicemente vuol mostrare, con il suo ragionamento, che assumendo come ipotesi il "molteplice" si incorre nella sua negazione, e quindi in contraddizioni rispetto alla realtà fisica ancora più assurde di quelle rimproverate a Parmenide, per il quale l'Essere è "uno" e "non molti".

Ugualmente, molti studiosi attribuiscono a Zenone altri intenti, che però (chissà poi perché) non sono da lui esplicitamente dichiarati e nemmeno accennati nei suoi paradossi. Sarebbe più corretto e sensato, invece, parlare semplicemente di problemi e concetti contenuti in forma latente nelle sue aporie, di cui Zenone stesso, molto probabilmente, non era consapevole. Perché, altrimenti, non farne menzione, considerata anche la personalità polemica di Zenone?

I problemi aperti dai paradossi di Zenone sono vari e tutti di fondamentale importanza per la scienza.

Uno è quello dell'infinito potenziale e dell'infinito attuale. Il primo, come abbiamo visto, è concepito come un processo mentale iterativo che, ad ogni iterazione, produce elementi nuovi senza aver mai termine. Il secondo, invece, è concepito come un'entità a se

34 Si tenga presente che dell'opera di Zenone nulla ci è pervenuto di sua mano, ma soltanto attraverso le fonti indirette costituite dai cinque frammenti riportati da Simplicio nei suoi commentari alla *Fisica* di Aristotile (cfr. la parte iniziale di questo scritto).

stante, avente una sua esistenza compiuta. Le successive divisioni in due metà di un segmento (come nella *Dicotomia* di Zenone) sono un esempio di infinito potenziale, mentre un insieme infinito di elementi (per esempio l'insieme dei numeri naturali) costituisce un caso di infinito attuale. Gli antichi pensatori e matematici greci rifiutavano l'infinito attuale, che pure in epoca successiva ha incontrato molte resistenze, a causa dei numerosi paradossi cui dava luogo, risolti soltanto nell'Ottocento grazie all'opera di Dedekind e Cantor, con la definizione chiara e precisa d'insieme infinito, costituita dalla loro proprietà caratteristica di essere composti da elementi che sono tanti quanti quelli di un sottoinsieme dell'insieme stesso: gli elementi di un insieme infinito possono, infatti, essere posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un suo sottoinsieme (per es. i numeri naturali in corrispondenza biunivoca con i loro quadrati).[35]

Un altro riconoscimento di paternità postuma vede in Zenone il padre della geometria razionale. La critica di Zenone alla monade pitagorica, resa evidente nell'*Achille* dalle conseguenze contraddittorie della concezione monadica o granulare della retta, apre, infatti, senz'altro la via alla geometria razionale o geometria degli enti ideali, ove il punto è privo di estensione in qualunque direzione, la retta non ha spessore ed è illimitata nei due versi della direzione che essa determina, il piano non ha spessore ed è illimitato nelle infinite direzioni corrispondenti alle infinite rette di un fascio ad esso appartenente.

Zenone può essere considerato anche, a buon diritto, il padre della logica, avendo dato un esempio mirabile, nei suoi paradossi sul moto, di puro ragionamento e in particolare di quella forma di dimostrazione del tutto astratta che è la "riduzione all'assurdo". Una dimostrazione diretta consiste in argomentazioni tali da derivare per via logica dall'ipotesi I - cioè da ciò che si ammette essere vero - la tesi T, cioè la proposizione che si vuole dimostrare essere vera. Nelle dimostrazioni per assurdo, invece, si segue un metodo indiretto,

---

35 Ovviamente questa proprietà non vale per ogni sottoinsieme di un insieme infinito: l'insieme dei numeri naturali non può essere posto in corrispondenza biunivoca, per esempio, con il suo sottoinsieme {3, 7, 189}. Pertanto, più correttamente, bisognerebbe dire che un insieme è infinito se esiste almeno un suo sottoinsieme con il quale può essere posto in corrispondenza biunivoca.

mostrando che supponendo "temporaneamente" che la tesi sia falsa, e quindi che sia vera la sua negazione *non-T*, allora consegue la negazione dell'ipotesi *non-I*: ma ciò è assurdo, poiché *I* è la proposizione che accettiamo vera per assunzione e d'altra parte, per il principio di contraddizione, essa non può essere contemporaneamente vera e falsa (*I* e *non-I*). Dunque, se la negazione della tesi (*non-T*) porta a una contraddizione, per il principio del terzo escluso deve essere vero *T*, come volevasi dimostrare. Questo tipo di ragionamento, però, offre difficoltà notevoli, costringendo a considerare situazioni fittizie che ripugnano l'intuizione, che pertanto deve essere bandita e lasciare il posto soltanto a una rigorosa serie di passaggi logici astratti.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia, per la revisione del testo, il prof. Gian Italo Bischi (professore ordinario di Matematica Generale all'Università degli Studi di Urbino) e il prof. Vincenzo Fano (professore di Logica e Filosofia della scienza all'Università degli Studi di Urbino).

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"