Frammenti di un discorso amoroso tra filosofia e matematica

dal *Filebo* di Platone

Giordano Bruno*

Sunto: *Numero, misura, limite, infinito, quattro tra i principali concetti della matematica si ritrovano nel Filebo di Platone. Qui vengono trattati, a partire dai "germi" presenti nell'opera. E dall'indagine filosofica, sviluppata da quest'ultimo su di essi, si può ricavare l'essenza della sua visione che ci fornisce una lettura diversa, da quella generalmente trasmessa, del suo pensiero riguardo la scienza e la matematica in particolare.*

Parole Chiave: Numero, misura, limite, infinito.

Abstract: *Number, measure, limit, infinity, four of the main concepts of mathematics are found in Plato's Filebo. Here they are treated, starting with the "germs" present in the work. And from the philosophical investigation, developed by the latter on them, one can derive the essence of his vision that provides us with a different reading, from the generally transmitted, of his thought about science and mathematics in particular.*

Keyword: Number, measure, limit, infinity.

Citazione: Bruno G., ***Frammenti di un discorso amoroso tra filosofia e matematica***, «ArteScienza», Anno IV, N. 7, pp. 31-46.

* Direttore onorario di «ArteScienza»e Presidente onorario dell'Associazione culturale "Arte e Scienza", matematico, direttore di ISIA Design Pescara; gibrun84@gmail.com.

Domandasi se tutti li infiniti sono equali ovvero maggiori l'un che l'altro. Rispondesi che ogni infinito è eterno e le cose eterne son d'equal premanenzia, ma non di lunghezza d'età, perché quel che in atto fu prima cominciato a dividere, ha passato più età, ma li tempi a venire son equali.

Leonardo da Vinci, *Pensieri*

Dopo quasi duemila e cinquecento anni dalla nascita di Platone, dalla finestra di un osservatorio che è quella di un matematico dei nostri tempi (…che forse, a sua discolpa, ha la caratteristica di non essersi fatto completamente travolgere dal flagello della specializzazione) cosa possiamo percepire e documentare di non detto, di non sviscerato ancora, da un' opera come il *Filebo*?

E se, al contrario, provassimo a compiere un altro tipo di operazione e domandarci soltanto se dagli sviluppi della matematica, e della scienza in generale, non possiamo cogliere in quest'opera i germi, i semi di quello che oggi ci appare consolidato e quasi scontato?

Chiediamoci, per prima cosa, quali sono, tra i tanti, i concetti matematici che più di altri hanno caratterizzato la crescita di questa disciplina e che in qualche modo sono i più filosofici.

Risponderei che sono quelli di numero, di misura, di limite, di infinito! Tralascio volutamente quello di probabilità, un po' perché può rientrare in quello di misura, un po' perché richiederebbe una trattazione a sé per l'importanza che sempre più sta assumendo.

Oggi nulla della realtà che viviamo, che percepiamo, delle scoperte della scienza e delle sue applicazioni alla tecnologia, non ha in qualche modo a che fare con tali archetipi.

Ebbene tutti questi concetti sono presenti nel *Filebo*!

Basterebbe a sostegno di ciò citare questo passaggio:

> SOCRATE – (…) E gli antichi (…) ci hanno trasmesso questo messaggio: che le realtà che diciamo esistere sempre, essendo costituite da uno e da molti, hanno in sé connaturato limite e illimitato.

(…) l'Idea dell'illimitato non bisogna attribuirla alla molteplicità, prima di averne individuato il numero totale, mediano tra l'infinito e l'uno, e solo allora lasciare che ciascuna unità di tutte le cose vada nell'illimitato.

Fig. 1 - Socrate.

Come ho detto non seguirò una via interpretativa di quanto affermato da Platone, ma cercherò di esporre come la matematica abbia affrontato il rapporto tra l'uno e il molteplice, come abbia affrontato il problema del limite e dell'illimitato e quello dell'infinito.

Prima di fare ciò, però, mi preme far riflettere su quanto si possa ricavare dalla lettura del *Filebo* di attinente alla natura della scienza. Dal dialogo che sto per riportare mi sembra innegabile che emerga in Platone una straordinaria visione paradigmatica di una scienza che non può fondarsi totalmente né sul determinismo, né sull'oggettivismo, né sul concetto di verità assoluta: tutto quanto è stato messo in discussione dal pensiero del Novecento riconoscendo, al contrario, che la scienza nel suo procedere deve fare i conti sempre più con l'indeterminismo, il soggettivismo e la relatività delle verità.

SOCRATE – Tu hai forse fatto queste affermazioni dopo aver pensato qualcosa di questo tipo, che le numerose tecniche, e quanti vi si affaticano, in primo luogo utilizzano opinioni e svolgono con zelo indagini nell'ambito delle opinioni? Se poi uno ritiene di studiare la natura, non sai che per tutta la vita indaga le cose di questo mondo, come si sono generate, come patiscono e come agiscono? Possiamo affermarlo o no?

PROTARCO – Sì.

SOCRATE – Dunque, questo nostro uomo non si affatica intorno alle realtà che sempre sono, ma su quelle che divengono, diverranno e sono divenute?

PROTARCO- Verissimo.

SOCRATE – Dunque, potremmo mai affermare che è certa nel senso della più rigorosa verità qualcuna di queste cose, delle quali nessuna è stata mai identica a se stessa, né mai lo sarà, né lo è ora?

PROTARCO – E come?

SOCRATE – Su realtà che non sono stabili da nessun punto di vista come potremmo avere una qualsivoglia conoscenza stabile?

PROTARCO – In nessun modo, credo.

SOCRATE – Dunque, non c'è, su queste realtà, né intelligenza né qualche scienza che possegga la verità assoluta.

PROTARCO – No, verosimilmente.

Riprendiamo ora a esporre quanto ci siamo proposti, cominciando, per prima cosa, a soffermarci sul numero. Ancora oggi quando si parla di numeri naturali, in un certo senso, lo si fa pensando ad una loro doppia valenza. Da una parte se ne riconosce la natura qualitativa, quella che si è soliti indicare come ordinale. Per cui, per dirla con il matematico Giuseppe Peano, *1* è un numero naturale e se *n* lo è, allora il suo successivo *n+1* è ancora un naturale. E dall'altra parte la natura quantitativa, quella che si è soliti indicare come cardinale. Per cui il numero 1 è l'insieme che ha come elementi tutti gli insiemi costituiti da un solo elemento, il numero 2 è l'insieme che ha come elementi tutti gli insiemi costituiti da coppie di elementi, il numero 3 è l'insieme che ha come elementi tutti gli insiemi costituiti da terzetti di elementi,....e così via. Inoltre si dice rispettivamente che un insieme costituito da un solo elemento è un rappresentante del numero 1, un insieme costituito da una coppia di elementi è un rappresentante del numero 2, un insieme costituito da un terzetto di elementi è un rappresentante del numero 3, ... e così via.[1]

1 In generale e con maggior rigore: il numero di una classe è la classe delle classi ad essa

Questa doppia natura degli stessi enti: i numeri (naturali), compare anche nel *Filebo*.

Infatti seguiamo il testo:

> SOCRATE – L'aritmetica in primo luogo, non bisogna forse dire che una è quella dei più, un'altra è quella dei filosofi?
>
> PROTARCO – E come allora si può distinguere un'aritmetica dall'altra?
>
> SOCRATE – Non è una distinzione da poco, Protarco. Infatti, tra quelli che si occupano del numero, gli uni numerano unità disuguali, come due eserciti, due buoi, due oggetti qualsiasi, i più piccoli o anche i più grandi di tutti; gli altri, invece, non accetterebbero mai di associarsi a questi, se non si stabilisce che nessuna delle innumerevoli unità è diversa da un'altra.

Si osservi che da qui e da altre opere platoniche ha preso piede l'idea dell'esistenza di una matematica pura, che si occupi cioè soltanto dei puri enti a cui si rivolge, in particolare i numeri e le figure geometriche, senza contaminazioni con la realtà. Separata, quindi, da tutto ciò che invece ha a che fare con le scienze e la vita quotidiana dell'uomo. Mentre l'altra matematica, quella diciamo così del reale, è stata chiamata matematica applicata.

Sentiamo cosa dice Platone, ancora a proposito, nel *Filebo*:

> SOCRATE – E che? Prendiamo la tecnica del calcolo e quella della misurazione utilizzate dai lavoratori delle costruzioni e dei commercianti, poste in confronto con quelle usate nella filosofia quando si occupa di geometria e di calcoli esatti: di ciascuna bisogna dire che è solo una o dobbiamo considerarla duplice?

Può essere degno di nota osservare che Platone, quasi prevedendo che questa distinzione netta fra matematica pura e applicata avrebbe procurato tanti guai e tante dispute soprattutto in suolo

---

simili, intendendosi per classi simili classi fra le quali può essere posta una corrispondenza bunivoca. Se due classi sono in corrispondenza biunivoca fra loro ad ogni elemento della prima corrisponde uno e un solo elemento della seconda e viceversa. Di conseguenza è evidente le due classi sono equinumerose cioè hanno lo stesso numero di elementi. Utilizzando però la nozione di similitudine fra classi si evita, nella definizione di numero, l'uso del concetto stesso di numero, che renderebbe circolare e quindi invalidata la definizione.

italico, pervaso – come è ben noto – da un estremismo idealistico, si cautela intelligentemente facendo esprimere Socrate e Protarco al modo seguente:

> SOCRATE – Vuoi, dunque, che io, sopraffatto come un portinaio spinto e premuto dalla folla, spalanchi le porte lasciando che tutte le scienze entrino e si mescolino insieme la più manchevole con quella pura?
> PROTARCO – Io proprio non vedo, Socrate,che danno potrebbe subire chi, possedendo le scienze superiori, accettasse anche tutte le altre.
> SOCRATE – Devo allora permettere che tutte irrompano in quello che Omero chiama, con espressione molto poetica, «bacino della mescolanza»?
> PROTARCO – Certo.

In buona sostanza, la distinzione proposta tra scienze pure e scienze applicate, e la riconosciuta supremazia delle prime, viene qui ridimensionata, accettandone la “mescolanza”.

Mi piace pensare che una più attenta lettura del *Filebo* avrebbe potuto e potrebbe evitare l’atteggiamento di aperta ostilità con il quale si deve spesso misurare la scienza tutta e in particolare quella applicata.

Ma torniamo alla matematica, una delle sue conquiste fondamentali è stata quella di dare un significato a quei numeri che come $\sqrt{2}$ hanno messo in crisi l’impianto pitagorico, o come π, o il numero *e* di Nepero. Questi, non potendo essere espressi come rapporto (*ratio*) di due numeri naturali (o interi se vogliamo considerare anche il segno), vengono chiamati numeri irrazionali. E al contrario dei numeri razionali (rapporti tra interi) non sono esprimibili attraverso numeri decimali finiti o periodici.

Ma allora, se così stanno le cose, gli oggetti in questione cosa rappresentano?

Bene, per arrivare a comprenderne la struttura e il significato ci sono voluti più di duemila anni e un poderoso sviluppo della matematica.

A tal fine è stato necessario affrontare e chiarire proprio i significati di finito e infinito, di limite, di limitato e illimitato.

Vediamo come.

Per prima cosa è stato necessario distinguere tra un insieme di numeri (o di elementi qualsiasi) finito ed uno infinito.

Una prima indicazione in questo senso ci viene da Galileo Galilei, il quale nel confrontare l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei quadrati dei numeri naturali si accorge che è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra di essi (ad ogni naturale viene associato un unico quadrato e viceversa). Ma nello stesso tempo gli salta agli occhi un'incongruenza: la corrispondenza stabilita è tale da associare biunivocamente un insieme ad un suo sottoinsieme proprio. Ciò lo lascia incredulo, perché tale circostanza non si presenta mai nel caso di insiemi finiti: due insiemi si possono mettere in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di elementi (ovvero nessuno dei due può essere sottoinsieme proprio dell'altro).

Come risolvono questo problema i matematici? Il problema si può risolvere così: tra insiemi con un numero finito di elementi e in corrispondenza biunivoca tra loro si può dire che essi hanno la stessa numerosità, ovvero ci sono tanti elementi nell'uno quanti nell'altro. Nel caso di insiemi con un numero non finito di elementi non si può più parlare di numerosità, ma occorre introdurre un concetto più generale quello di cardinalità; stabilendo che due insiemi qualsiasi hanno la stessa cardinalità (o potenza) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro.

Da ciò risulta semplice passare a definire cosa si intenda per insieme infinito: esso è tale quando ha la stessa cardinalità di un qualunque suo sottoinsieme proprio.

Ecco che l'insieme dei numeri naturali risulta non solo non finito, ma infinito.

Chiarito ciò, possiamo chiamare successione numerica un insieme di numeri posto in corrispondenza univoca con l'insieme dei numeri naturali (ad ogni numero naturale corrisponde un solo numero reale e non viceversa). Tale corrispondenza non fa altro che ordinare l'insieme dato, mettendone un elemento al primo posto, uno al secondo e così via, ottenendo un nuovo insieme indicato con (a_n), o con $\{a_1, a_2, a_3, ...a_n,...\}$, chiaramente infinito.

Si dicono poi crescenti quelle successioni per le quali $a_n < a_{n+1}$, per ogni n naturale e decrescenti quelle per le quali $a_n > a_{n+1}$, per ogni n .

Tornando al nostro scopo, quello di dare un significato a $\sqrt{2}$, possiamo procedere come di seguito descritto.

È possibile costruire due successioni di numeri razionali, di cui una crescente, ad esempio *1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421,…* e una decrescente, ad esempio *1.42, 1.413, 1.4141, 1.41420,…* tali da formare due insiemi numerici separati e contigui, per i quali gli elementi del primo insieme sono tutti minori o uguali di quelli del secondo, ed esistono due elementi, uno nel secondo e uno nel primo la cui differenza è minore di un qualsiasi fissato numero positivo. Esiste allora ed è unico un elemento che separa i due insiemi: tale numero reale è proprio $\sqrt{2}$, che risulta essere il più piccolo numero che è maggiore degli elementi della successione crescente data e contemporaneamente il più grande numero che è minore degli elementi della successione decrescente data:

$$1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ldots \leq \sqrt{2} \leq \ldots,\ 1.41420,\ 1.4141,\ 1.413,\ 1.42$$

A questo punto un numero che sia o razionale o irrazionale viene detto reale e ciascuno di questi numeri che non sia razionale può essere costruito alla stregua di $\sqrt{2}$ e pensato sempre come elemento di separazione di due successioni di numeri razionali.

Ancora, si dice che una successione è limitata superiormente se esiste un numero reale k tale che $a_n \leq k$, per ogni naturale n; mentre è limitata inferiormente se esiste un numero reale h tale che $a_n \geq h$, per ogni naturale n. E si dice limitata se esiste un numero reale positivo M tale che $|a_n| \leq M$.

Si ha allora un altro risultato particolarmente significativo: un insieme infinito può essere limitato. Si pensi alla successione formata dai reciproci dei numeri naturali, per essi infatti si ha $0 \leq 1/n \leq 1$, qualunque sia n.

Questo è uno dei punti che ci distingue dal pensiero greco (almeno di una parte dei pensatori greci) che sembra non faccia differenze tra i concetti di infinito e illimitato, come appare anche nella prima citazione di Socrate tratta dal *Filebo*.

Inoltre, relativamente alle successioni, si può introdurre un concetto ancor più significativo: quello di limite.

Si dice che una successione ammette come limite un numero l (o tende ad l) se, comunque preso un numero reale positivo ε, a partire da un certo elemento della successione in poi lo scarto tra questi numeri ed l è sempre minore di ε.

In sostanza ciò significa che al crescere indefinito di n la successione "si avvicina sempre di più" a un numero dato.

Ad esempio la successione ($1/n$) tende a 0, infatti da un certo n in poi $1/n - 0$ è inferiore ad un qualunque numero reale positivo fissato.

Da ciò si deduce anche che una successione che ammette limite è certamente limitata, mentre non è vero in generale il viceversa. Ad esempio la successione $((-1)^n)$ non ammette limite perché oscilla sempre tra -1 e 1, mentre è ovviamente limitata tra -1 e 1.

Ecco che, allora, i risultati ottenuti dalla matematica attraverso la definizione e l'illustrazione di questi concetti ci portano a dare risposta al primo dei problemi affrontati nel *Filebo*: il rapporto tra l'uno e il molteplice.

È ben nota la posizione che il filosofo eleate Zenone aveva nei confronti del movimento e dell'infinita divisibilità dello spazio e del tempo, espressa nei suoi famosi paradossi. In particolare in quello noto come il paradosso della *Dicotomia*. Una massa per andare da un estremo all'altro di uno stadio dovrebbe percorrere prima la metà di tale distanza e prima ancora la metà della metà di essa e così via. Ma poiché questo procedimento di divisione per la metà non può avere fine, quella massa non riesce ad andare da un estremo all'altro dello stadio in un tempo finito.

Osserviamo allora il paradosso dal punto di vista matematico. In sostanza, se ci si riporta ad una distanza unitaria, si tratta di sommare le seguenti quantità: $1/2, 1/4, 1/8, \ldots, 1/2^n, \ldots$. In realtà però noi sappiamo sommare solo un numero finito di termini (ovvero solo in tal caso è definita nel campo dei numeri reali l'operazione di addizione), quindi come fare per effettuare quella somma?

Bene, i concetti di successione e di limite ci vengono incontro.

Consideriamo la successione numerica ($1/2^n$) e costruiamo una nuova successione (S_n) al modo seguente:

$S_1 = 1/2$,
$S_2 = 1/2 + 1/4$,
$S_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8$,
....
$S_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n$,
… .

Inoltre consideriamo la successione (P_n) costituita da {*1, 1/2, 1/4, 1/8, …, 1/2*^{n}*,…*}, i cui termini sono in progressione geometrica di ragione *1/2* (cioè ciascun termine può essere ottenuto moltiplicando il precedente per *1/2*) e di cui si può ricavare la S_n somma dei primi n termini:

$$S_n = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}$$

Se studiamo il limite della successione di termine generale P_n, per quanto esposto prima, tale limite vale *1 / (1-1/2)* cioè è uguale a 2.

Pertanto la nostra successione (S_n) che è uguale alla successione (P_n-1) avrà come limite 1. La somma indicata degli infiniti termini della successione (P_n-1) non è altro che il limite al quale tende la successione delle somme parziali (S_n).

Ma, in definitiva, quale significato avrà il passaggio al limite della successione (S_n), se non quello di considerare la somma degli infiniti termini:

$$1/2,\ 1/4,\ 1/8, \dots,\ 1/2^n, \dots\ ?$$

Alla luce di tali osservazioni possiamo concludere che è possibile porre:

$$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots$$

E analogamente qualunque sia *a* (≠0) otteniamo:

$$a = 1/2\, a + 1/4\, a + 1/8\, a + \dots + 1/2^n\, a + \dots$$

Ovvero qualunque numero reale, purché diverso da zero, è scomponibile nella somma di infiniti di numeri reali .

Ma gli sviluppi della matematica, attraverso la teoria delle serie (cioè delle successioni costituite dalle somme dei termini di successioni date, come ad esempio quelle viste in precedenza), ci portano ad un altro risultato notevolissimo. Un segnale periodico, ovvero una funzione periodica del tempo, sotto opportune ipotesi, può essere sviluppata in serie di funzioni trigonometriche (teorema di Fourier). Ovvero un suono vocale, uno musicale (regolari, cioè periodici) possono essere rappresentati attraverso combinazioni lineari (infinite) di suoni semplici, ossia di funzioni della forma $y = a \, sen \, bx$, dove a rappresenta l'ampiezza e $\boldsymbol{b}$ la frequenza del suono. I suoni semplici sono detti armonici del suono. E fra i singoli componenti del suono complesso, quello che ha la frequenza più bassa è chiamato primo componente o tono fondamentale, quello immediatamente successivo secondo componente e la sua frequenza, per il teorema di Fourier, è doppia di quella fondamentale; e così di seguito. Per cui l'ennesimo componente ha frequenza n volte maggiore di quella fondamentale. Per la caratterizzazione dei suoni nelle tre proprietà fondamentali : altezza, intensità e timbro, rimando alla piacevolissima lettura del capitolo "Il seno del sol maggiore", del libro *La matematica nella cultura occidentale* di Morris Kline.

Ancora una volta l'uno può essere scomposto nel molteplice e viceversa dal molteplice può nascere l'uno!

Ma vediamo a tale proposito cosa dice Platone nel *Filebo*:

> SOCRATE – Il suono, che esce dalla nostra bocca, è in qualche modo uno e insieme illimitata molteplicità, in tutti e in ciascuno.
>
> SOCRATE – Invece, amico mio, quando tu avrai colto qual è il numero degli intervalli di suono nell'acuto e nel grave, quali essi sono, e quali sono i limiti degli intervalli, e quante combinazioni risultano – combinazioni che gli antichi hanno rilevato e tramandato a noi posteri con l'indicazione di chiamarle armonie; inoltre di altri simili rapporti che si manifestano nei movimenti del corpo, misurati per mezzo di numeri, dicono che bisogna chiamarli ritmi e metri; dicono anche che bisogna indagare con tale impostazione per ogni unità e molteplicità – quando, dunque, tu avrai colto tali realtà in questo

> modo, allora sarai diventato esperto e quando, indagando così, avrai compreso qualsiasi altra unità, allora sarai diventato competente in materia. Invece, l'infinità delle singole cose e la molteplicità illimitata insita in ciascuna di esse ti rende ogni volta incapace di pensare e ti fa indegno di stima e di apprezzamento, perché non hai mai considerato in nessuna realtà il suo numero.

Queste parole mi suggeriscono di tornare, ma da un altro punto di vista, al rapporto tra l'uno e il molteplice.

È il matematico Georg Cantor che ci illumina: che rapporto c'è tra limitato e illimitato, tra finito e infinito? In parte abbiamo già dato una risposta a questa domanda, introducendo il concetto di cardinalità. Vediamo di andare avanti.

Occorre a questo punto introdurre un concetto generale, quello di misura. In genere, la misura è l'espressione per mezzo di un numero di una grandezza (geometrica, fisica,…), ma può essere anche la valutazione numerica di una caratteristica di un insieme, un oggetto, un ente, un evento. Ad esempio, n è la cardinalità di un insieme formato da n elementi, 1 è la misura dell'intervallo [0,1], 9 è la misura della superficie di un triangolo di base 6 e altezza 3, 8.7 è la valutazione media assegnata ad un ginnasta in una gara, 1/6 è la valutazione di probabilità assegnata al presentarsi di ciascuna faccia di un dado in un determinato lancio. Ma, anche, è infinita la cardinalità dell'insieme dei numeri reali compresi nell'intervallo [0,1], così come lo è quella relativa ai punti del piano appartenenti al triangolo considerato.

Riflettiamo, ora, sull'esempio relativo all'intervallo [0,1]: allo stesso intervallo possiamo assegnare due misure completamente diverse!

Come mai ciò è possibile? Fortunatamente ci viene in aiuto Cantor.

Egli si propose il problema di studiare l'infinito, prima di lui già Bolzano aveva fornito la definizione di insieme infinito, riportata in precedenza, come risposta a ciò che a Galilei sembrava impossibile e che aveva abbandonato. Cantor indicò con $\aleph_0$ la cardinalità dei numeri naturali , che chiamò cardinalità del numerabile, identificando con esso il più piccolo dei numeri transfiniti. Inoltre dimostrò che, mentre è possibile porre in corrispondenza biunivoca sia l'insieme degli interi, sia quello dei numeri razionali, con quello dei naturali, non è possibile porre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei reali e quello dei naturali. In particolare egli provò che non è possibile mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme dei numeri appartenenti all'intervallo [0,1] con l'insieme dei naturali. Indicò allora con C la cardinalità di questo insieme e poiché dimostrò anche che l'intervallo [0,1] può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme di tutti i reali e che a ciascuno di questi corrispondeva un punto su una retta e viceversa, chiamò cardinalità del continuo quella dei numeri reali. Egli dimostrò ancora che l'insieme delle parti di un insieme deve avere cardinalità superiore di quella dell'insieme dato, dando luogo così ad un ordinamento tra infiniti, e formulò la sua famosa ipotesi del continuo, secondo la quale tra la cardinalità del numerabile e quella del continuo non vi sono cardinalità intermedie.

I brillanti risultati di Cantor ci permettono di fare qualche altra considerazione.

Se consideriamo, ora, l'ulteriore paradosso di Zenone relativo alla freccia, possiamo cercare di darne una chiarificazione.

Infatti Zenone dice che se prendiamo in esame una freccia in volo, in ogni istante essa si trova in una posizione precisa e in ciascun istante successivo al precedente essa si trova in un'altra posizione. Quand'è che la freccia passa da una posizione all'altra? In che modo la freccia riesce ad arrivare ad una nuova posizione nell'istante immediatamente successivo? Georg Cantor ci rende semplice la risposta: non esiste l'istante successivo. Gli istanti si susseguono come i numeri reali e poiché non esiste il successivo di *1*, di e , così come di π, perché tra due numeri reali qualsiasi ce ne sono sempre infiniti, così non esiste nessun istante immediatamente successivo ad un istante dato.

Però questo significa che una freccia per passare da una posizione ad una vicina deve passare attraverso infinite posizioni intermedie, ma anche questo possiamo comprenderlo facilmente perché, come mostrato da Cantor, il tempo impiegato a farlo può essere finito pur contenendo un insieme infinito di istanti.

Si osservi che anche qui si ripropone quello che abbiamo visto,

Fig. 2 - C. M. Escher, *Sempre più piccolo*, xilografia, 1956.

ad esempio, per l'intervallo [0,1]. La misura temporale di questo intervallo è 1, quindi finita, ma ciò non toglie che in un intervallo limitato di tempo, siano presenti infiniti istanti di tempo!

Di più la teoria cantoriana degli insiemi ci permette di dare, in qualche senso ragione a Zenone, perché in ogni istante di tempo la punta della freccia occupa una certa posizione, quindi in tale istante la freccia non si muove perché un istante non ha durata. In ogni istante, quindi, la freccia è in quiete. E poiché ciò vale per ogni istante la freccia in movimento è immobile. Sembra assolutamente paradossale, ma è del tutto accettabile se pensiamo al movimento come un insieme di stati di quiete. Il moto non è altro che una corrispondenza tra infinite posizioni e infiniti istanti di tempo e a ogni istante dell'intervallo in cui un oggetto è in moto esso occupa una ben determinata posizione, pertanto lì è in quiete!

A conclusione, desidero proporre alcune immagini dovute all'artista Cornelius Maurits Escher, il cui scopo è quello di mostrare come un uomo di sensibilità e cultura vicino alla nostra abbia affrontato il tema della rappresentazione dell'infinito. Cioè in sostanza di come si possa comunicare l'idea di infinito avendo a disposizione uno spa-

Fig. 3 - C. M. Escher, *Limite del cerchio I*, xilografia, 1958.

zio limitato.

Si osservi, come Escher passi da una rappresentazione dell'infinito posto al centro del dipinto a quelle in cui invece viene posto ai bordi delle opere, e quanto queste ultime siano maggiormente evocative dell'idea di infinito che abbiamo!

Ebbene anche questo si deve alla matematica, perché è la conoscenza della geometria iperbolica che permette ad Escher tali rappresentazioni.

In chiusura, queste poche considerazioni nate dallo studio del *Filebo* potrebbero essere riassunte così:

Da Platone a Escher: i limiti del reale travolti dalla forza del pensare e del rappresentare!

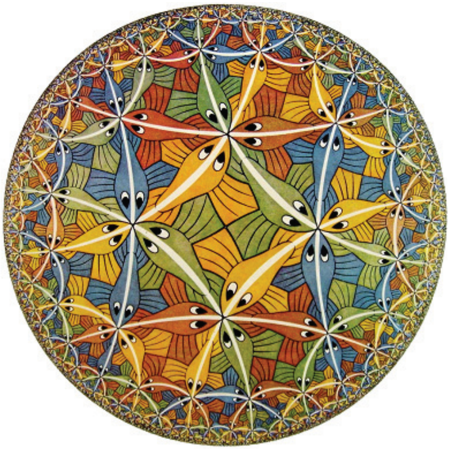

Fig. 4 - C. M. Escher, *Limite del cerchio III*, **xilografia, 1959.**

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"