# *La matematica fra sintassi e semantica*

Piero Trupia*

**Sunto:** *La matematica coglie l'aspetto quantitativo della realtà sia nelle quantità in se stesse sia nelle loro relazioni e trasformazioni determinate dal calcolo. Per questo motivo è la scienza di base in quanto la quantità è la caratteristica universale delle cose. La matematica coglie anche la logica delle relazioni quantitative tra le cose e, loro tramite, la logica del mondo materiale. Logica del discorso matematico e ontologia della realtà cui si applica sono i due poli sintattico e semantico della riflessione matematica.*

**Parole Chiave:** relazioni tra quantità, sintassi del discorso, semantica del referente.

**Abstract:** *Mathematics deals with the quantitave side of things wether in themselves or in their relations and transformations due to the calculation. For this reason mathematics is the basic science, insofar quantity is the universal feature of all things. Mathematics deals also with the logic of the quantitative relations and through them with the logic of the world itself. Logic of the mathematical discourse and onthology of the material quantitave things are two poles of mathematical thought in regard to syntax and semantics.*

**Keyword:** quantitative relations, syntax of the discourse, semantics of the reference-world.

**Citazione:** Trupia P., *La matematica fra sintassi e semantica*, «ArteScienza», Anno III, N. 6, pp. 29-70.

## 1 - Il formalismo e l'assiomatismo

Il formalismo e l'astrazione pura sono stati il sogno di David Hilbert (1862-1943) e di Gottlob Frege (1848-1925), in parte anche di Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947), che li trasfusero nei *Principia Mathematica.* Accenno a questa

* Matematico, fondatore e amministratore di Governance Consulting; piero.trupia@alice.it.

Fig. 1- Sir Bertrand Russell (1872-1970).

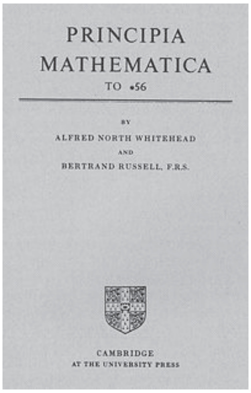


Fig. 2- I Principia Mathematica.

Fig. 3 - Alfred North Whitehead (1861-1947).

opera grandiosa che si raccomanda anche per l'elasticità mentale degli autori che si sono mostrati pronti a fare autocritica, quando necessario. Mi riferisco al libro *Le Théorème de Gödel*, sul teorema di incompletezza di Kürt Gödel (1906-1978), ove si attinge ai *Principia* di Russell- Whitehead per trarne un modello di formalizzazione delle proposizioni e dimostrazione di consistenza (o coerenza) assoluta di un sistema.[1]

"Formalizzazione" è da intendere come l'assegnazione ai termini del calcolo logico unicamente della caratterizzazione del loro operare secondo determinate regole: l'indipendenza, la coerenza o consistenza e la completezza degli assiomi. L'indipendenza degli assiomi assicura che nessuno di essi è deducibile dagli altri: se ciò accadesse non sarebbe un assioma ma un teorema e quindi non dovrebbe far parte dell'insieme degli assiomi. La coerenza degli assiomi assicura che non vi siano assiomi contradditori, ovvero che contemporaneamente asseriscano e neghino la stessa cosa per il medesimo ente primitivo. Se questo accadesse, il calcolo ne sarebbe inficiato, nel senso che da una premessa contraddittoria si potrebbe ricavare una conseguenza coerente con la premessa. Circostanza, questa, nota nel medioevo con la formulazione, attribuita a Duns

1 Ernest Nagel, James R. Newman, Jean-Yves Girard, *Le Théorème de Gödel*, Paris, Éditions du Seuil, 1989, pp. 51-60 (orig. 1958).

Scoto, *ex absurdo sequitur quodlibet*.

Resta da ricordare che un sistema di assiomi deve essere completo, ovvero da esso si devono poter ricavare tutti i teoremi del campo disciplinare che assiomatizzano.

La pura astrattezza è possibile soltanto nei giochi quali scacchi, carte ecc. Ciò perché il gioco è per definizione un'attività autoreferenziale, priva di corrispondenza con la realtà oggettiva, a meno che non si prenda in considerazione l'esito del gioco, come vincere o perdere, trionfare o deprimersi, guadagnare o rovinarsi. Ma queste evenienze non sono il gioco; sono le sue conseguenze. In tutte le altre attività non ludiche il riferimento alla realtà oggettiva è inevitabile.

Nella matematica l'oggetto "insieme"è un contenitore di quantità e ciò anche nel caso dell'insieme vuoto che corrisponde allo zero. Lo zero è una realtà ben concreta come nel caso in cui si ha zero denaro o zero paura. Opportunamente, il primo assioma della formulazione logica dell'*Aritmetica* di Giuseppe Peano (1858-1932) che in una prima versione suonava "1 è un numero" diventò poi "0 è un numero". Peano formulò il suo sistema assiomatico con l'introduzione di tre idee primitive: zero, numero, successivo e di cinque assiomi: 1) Zero è un numero. 2) Il successore di ogni numero è un numero. 3) Non esistono due numeri con lo stesso successore. 4) Zero non è il successore d'alcun numero. 5) Ogni proprietà di cui gode lo zero, e anche il successore di ciascun numero che gode di quella proprietà, appartiene a tutti i numeri (principio dell'induzione matematica).

L'ultimo assioma, il quinto, è particolarmente interessante. Questo assioma illustra il princi-

ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore

Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenaeo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA

REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE Via del Corso, 216-217. FLORENTIAE Via Cerretani, 8.

1889

**Fig. 4 - L'Aritmetica di Giuseppe Peano (1889).**

pio d'induzione o ricorrenza matematica. Ebbene, l'induzione e la ricorrenza sono entità concettuali del mondo e referenti oggettivi del discorso matematico, o meglio metamatematico, nella formulazione che ne diede Peano.

La prima formulazione della sua nuova concezione dell'aritmetica fu esposta da Peano nell'articolo *Sul concetto di numero* in «Rivista di Matematica» 1891, n. 1. Seguì una sua comunicazione al "Congresso Internazionale di Filosofia" del 1900 a Parigi. Russell ne fu talmente colpito da definire Peano «il grande maestro nell'arte del ragionamento formale, tra gli uomini dei nostri tempi»[2] e cominciò a pensare alla monumentale opera in tre volumi scritta poi assieme a Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, vol. I 1910, vol. II 1911, vol. III 1913.

**Fig. 5 - Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).**

Torniamo al discorso sugli assiomi, che merita, in questo ambito, una particolare attenzione.

Qui il formalismo matematico, reale o presunto, cede il passo a un assoluto realismo. La matematica è un mondo, quello delle quantità, delle relazioni tra quantità e delle figure geometriche, mentre la logica è una veste. Quel mondo è governato dalla coerenza o non contraddittorietà delle sue proposizioni e, prima ancora, nel mondo di riferimento, è governato dall'inerenza, la relazione di appartenenza tra soggetto e predicato, che i matematici danno per scontata e che fu espressa da Gottfried Wilhelm von Leibniz[3] (1646-1716) nel principio "*Omnis praedicatus inest subjecto*" (ogni predicato inerisce a un soggetto). L'inerenza è il referente formale, nel senso di logico, della matematica, così come la quantità e la forma geometrica sono il referente materiale, nel senso di entità-cosa. Senza l'assun-

2 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici,* in *Misticismo e logica*, Milano, Longanesi "I libri pocket", 1970, p. 74.

3 Gottfried Wilhelm von Leibniz è stato un matematico, filosofo, scienziato, logico, glottoteta, diplomatico, giurista, storico, magistrato tedesco.

zione di queste caratteristiche metafisiche del mondo, la matematica non sarebbe possibile.

Con il ricorso sistematico all'inerenza, statica come nell'uguaglianza e nell'equivalenza di dati, o dinamica come nella funzione, ove sono in gioco variabili, viene intessuta, a specchio del mondo oggettivo, l'interpretazione matematica del mondo.

La matematica è quindi una grande celebrazione, nella prospettiva della quantità, delle forme, dell'ordine regnante nell'universo, il *kosmos* greco, invece del *caos* precedente, accettato da Democrito, il quale, nelle parole di Dante, «il mondo a caso pone» (Inf. IV, 136).

La  coerenza è un'applicazione del principio d'inerenza; assicura la possibilità di dedurre da una base assiomatica consistente teoremi validi, non contraddittori tra loro o indeterminati, tali cioè da poter assegnare alle proposizioni che li esprimono uno dei due valori ”vero” o “falso”.

La deduzione estrae, per così dire, da un concetto le sue proprietà non apparenti nella semplice, diretta percezione o anche osservazione attenta.

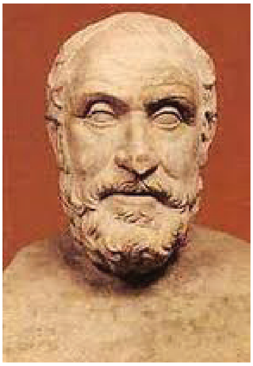

**Fig. 6 - Pirrone di Elide (365-275 a. C.).**

Percezione, intuizione, osservazione non bastano però, essendo esposte all'influenza, per lo più non avvertita, dei limiti dell'orizzonte cognitivo dell'osservatore, nonché al filtro, inconsapevolmente operato, dalle proprie credenze identitarie, quelle che costituiscono la personalità vitale e assicurano la stabilità dell'io. Come correzione di queste inevitabili distorsioni e limitazioni cognitive, di questi involontari occultamenti, viene raccomandata l'*epochè*, l'accantonamento di tutte le credenze personali e di quelle consolidate nel sapere condiviso, sul fenomeno osservato. Ma è impossibile spogliarsi totalmente di tutto il proprio sapere, quale che sia, e, soprattutto, essere consapevoli dei limiti dell'autoconsapevolezza di esso, oltre i quali non c'è possibilità di percezione e osservazione, proprio perché non si riesce a perimetrare ciò che s'ignora o non si è in grado di verificarne la presenza al di fuori del nostro orizzonte.

Questa cecità epistemica è particolarmente presente nel cosiddetto "uomo di un solo libro", in chi professa una sola dottrina e non riesce a prescinderne nella propria osservazione del mondo e di se stesso.

Pirrone di Elide (365-275 a. C.) ha avuto la forza e la lucidità di praticare un'assoluta *epochè*. Dubitava sistematicamente di tutto e si rifiutava di asserire anche soltanto un'opinione (afasia), di preferire alcunché (atarassia), di appassionarsi a qualcosa (apatia), di impegnarsi in una qualche attività non meramente biologica (mera sopravvivenza). Il suo allievo e cronista, Timone di Fliunte (321-230 a. C.), riporta che, essendo il maestro caduto in un fosso e rischiando di annegare, un allievo presente restò immobile e silenzioso e Pirrone, una volta venuto fuori, dopo molto annaspare, lo lodò. L'*epochè* può in ogni caso essere praticata in presenza di un oggetto visibile o comunque percepibile. Non è di nessuna utilità per quegli oggetti che si celano.

## 2 - Le verità matematiche sono tautologie

Un'osservazione di grande rilievo, non solo matematica ma anche filosofica, riguarda la natura tautologica delle verità matematiche. Analizzando senza preclusioni mentali gli assiomi in generale, si è scoperto che questi sono delle tautologie e che anche i teoremi da essi ricavati lo sono. Si aggiunga che la proprietà di essere una tautologia è ereditaria, nel senso che sono tautologie anche i teoremi ricavati dalle tautologie assiomatiche.

La tautologia non è una banalizzazione del concetto di verità. Essa è la spia del carattere profondamente unitario della verità, esattamente come l'esclusività e l'universalità metafisica del principio parmenideo "L'Essere è". Esso è quell'unico, immutabile Essere che è la sorgente inesauribile della verità, quale che sia la sua formulazione. Per trovarla, basta attingere a essa e unicamente a essa.

Tuttavia si dà una specificità semantica per le verità tautologiche proprie di ogni regione dell'Essere. È come se la sorgente della verità fosse un insieme di polle d'acqua, una per ogni regione dell'Essere. In tutti i casi possibili il formalismo logico ci dice che l'Essere è ordinato, quindi logico. Ma la logica non basta, poiché essa è l'ordine dell'espressione di una cosa, non la cosa.

Il grande matematico e logico tedesco Gottlob Frege nel 1884, nella sua opera *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'Aritmetica*), diede per primo una definizione matematica di numero (naturale cardinale) che sembra essere puramente formale ma che, invece, altro non esprime che «quel processo di astrazione che avviene in maniera naturale nel bambino, portandolo al concetto di numero, per ciò stesso detto 'naturale».[4] Oggi noi esprimiamo la definizione di numero data da Frege dicendo che "un numero naturale (cardinale) è l'insieme di tutti e soltanto gli insiemi simili o equipotenti fra loro."[5] In matematica si definiscono simili o equipotenti o equivalenti due insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca, ovvero tali che a ogni elemento dell'uno corrisponda uno e un solo elemento dell'altro e viceversa. È facile convincersi che se esiste una corrispondenza biunivoca fra due insiemi, questi hanno lo "stesso numero di elementi" ovvero la corrispondenza biunivoca fra due insiemi esprime, senza però usarlo, il concetto di equinumerosità fra due insiemi. Frege infatti usava il termine "equinumeroso" al posto di "simile" o "equipotente" o "equivalente" che noi oggi usiamo come sinonimi. È notevole osservare che in questa definizione "attuale" di numero non è utilizzato il concetto del "contare" ma «è tuttavia innegabile che quest'ultimo è psicologicamente intimamente connesso con il concetto di numero, sia nel suo processo di apprendimento sia nel riconoscimento di un particolare numero».[6]

Già il primo computer babilonese funzionava, anticipando

---

4 Luca Nicotra, *L'interferenza delle associazioni e il concetto di numero*, in «Il Contributo» Anno XXXV, IV n.s., gennaio/agosto 2013 - N. 1-2, p. 14.

5 Nei *Die Grundlagen der Arithmetik*, paragrafo 72 (p. 85), Frege così definisce il numero naturale (cardinale): «L'espressione "il concetto F è equinumeroso al concetto G" abbia lo stesso significato dell'espressione "esiste una relazione φ che fa corrispondere uno-a-uno gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G"» (Gottlob Frege, *Leggi fondamentali dell'aritmetica*, Roma, Edizioni Teknos, 1995, a cura di Carlo Cellucci, trad. it. di Natalia Rolla, p. 114). Una definizione più completa e precisa fu data da Frege nella sua opera *Grundgesetze der Arithmetik* (*Le leggi fondamentali dell'Aritmetica*) del 1893.

6 Luca Nicotra, *Op. cit.* p. 17.

**Fig. 7 - Il "primo computer" babilonese: «Era uno stazzo, una cesta di sassi ...».**

l'abaco, utilizzando, inconsciamente, proprio questa definizione di numero. Era uno stazzo (figura 7), una cesta di sassi equipotente al gregge (hardware), del quale si voleva controllare l'integrità, applicando l'intuita e non formulata legge della corrispondenza biunivoca (software) fra il gregge e la cesta di sassi.

In termini metamatematici ci si può chiedere che tipo di scienza è la matematica: scienza della natura, dello spirito o altro?

È altro. Così come la grammatica è una scienza della logica del discorso, la matematica è in gran parte la scienza della logica di uno o più discorsi sulla quantità e sull'ordine in Natura. Lo è in base a un postulato tacito, quello, ricordato, dell'ordine della Natura in tutti i suoi aspetti.[7] In virtù di questa corrispondenza referenziale, le formulazioni matematiche, i suoi algoritmi, trovano applicazione nella formalizzazione delle relazioni tra gli enti della matematica e delle scienze della materia, in particolare della fisica, al punto che si può ben dire che la matematica è il linguaggio proprio di questa

7 La matematica non è la scienza della quantità e dell'ordine soltanto. Così come è falsa l'affermazione, purtroppo ancora molto diffusa, che è la scienza dei numeri. Vi sono branche della matematica che non hanno per oggetto di studio i numeri e nemmeno le quantità (geometria descrittiva, geometria proiettiva, calcolo delle probabilità, ecc.). Cfr. Bertrand Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Roma, Newton Compton, 1970, pp. 228 e sgg.

disciplina, come lo pensavano Galilei per primo e tutti i grandi fisico-matematici dopo di lui.

Albert Einstein (1879-1955) fu un grande fisico con qualche incertezza in campo matematico. Per trovare formalizzazioni precise ed efficaci per le sue nuove visioni cosmologiche, si rivolgeva ad amici devoti. In modo sistematico a Kürt Gödel, suo collega a Princeton, e a Michele Angelo Besso (1873-1955), ingegnere e suo ex collega all'ufficio brevetti di Berna, con il quale rimase in corrispondenza epistolare per cinquantadue anni.[8] Besso morì un mese prima di Einstein. Vale la pena riportarne un piccolo brano, che evidenzia il carattere di questa collaborazione a distanza.

**Fig. 8 - Albert Einstein (1879-1955) nel 1905.**

**Fig. 9- Michele Angelo Besso (1873-1955).**

Da Michele Besso, Berna, 13 XII 1934 ad Albert Einstein:

> Caro Albert, le nebulose si respingono e anche gli uomini faticano a non perdersi di vista. Possa così almeno un saluto, prima che l'anno finisca, pervenire a colui che ha rappresentato il punto più alto della mia vita, la personificazione della lotta umana per la conoscenza. […] Devo rinunciare, affinché queste righe possano partire subito, alle molte cose che vorrei dirti sulle galassie, in particolare sulle cefeidi …

Da Albert Einstein, Princeton, 16, II, 1936 a Michele Besso:

> Tutto questo silenzio, durato così a lungo, deriva dal fatto che il demone della matematica mi sta incessantemente alle calcagna. […] Ti mando un piccolo lavoro che rappresenta un primo passo. La

8 Giuseppe Gembillo (a cura di), *Albert Einstein. Corrispondenza con Michele Besso (dal 1903 al 1955)*, Napoli, Guida Editori, 1995.

particella neutra e quella elettrica appaiono come buchi nello spazio, in modo che il campo metrico si ritrae in se stesso. [...] Il compito sul quale sudo senza tregua, insieme con un giovane collega, è l'esame del problema degli n corpi [...] un meraviglioso problema matematico...

**Fig. 10 - Albert Einstein con il suo fedelissimo amico Michele Angelo Besso.**

## 3 - La matematica come predizione e validazione

La matematica è indispensabile sia nella fase della modellazione, con la quale esercita le sue funzioni interpretativa e predittiva della realtà, sia in quella del *test*, con la quale valida un risultato sperimentale.

La storia della scienza ha dimostrato che è spesso possibile colmare il vuoto di referenza con la matematica utilizzata nella sua funzione predittiva. L'unica possibilità, in tali casi, è percorrere la via epistemica, scoprendo e interpretando le tracce che il vuoto di referenza imprime nella materia palese.

Un esempio recente e notevole di conoscenza della "realtà occulta", ovvero della materia e dell'energia oscura, così detta proprio perché non percepibile o fuori della portata anche dei più potenti dispositivi di osservazione disponibili e, presumibilmente, di cui si disporrà. I modelli fisici ipotetici della realtà occulta, costruiti in base alle tracce e alle evidenze sperimentali via via raccolte, vengono in seguito matematicamente formalizzati e si riesce a completarli per via logica, collazionando ciò che via via appare come sviluppo necessario all'interno della formalizzazione e non s'incontra ancora nella realtà oggettiva. È il caso del bosone di Higgs.

La materia subatomica è un esempio di predizione matematica. Così, dall'energia alle particelle, si costruiscono modelli induttivi che, sempre tramite tracce e mai in modo diretto, vengono sottoposti a sofisticati *test* sperimentali.

Anche la storia dell'astronomia è pervasa da numerosi esempi di predizione matematica. Esemplari le scoperte teoriche, prima degli avvistamenti, di Plutone e Nettuno, tramite il calcolo matematico delle perturbazioni gravitazionali esercitate sui corpi del sistema solare prrossimi ad essi.

La modellazione matematica della realtà fisica è ricorrente nell'ingegneria. Il volo umano fu realizzato quando si abbandonò la soluzione fallace del modello aviario (Icaro), quella del modello del galleggiamento nell'aria (mongolfiera) e si adottò quella controfattuale del più pesante dell'aria, reso possibile dalla copresenza di una spinta in grado di vincere la resistenza dell'aria e di una forza perpendicolare alla direzione del moto in grado di sostenere l'ala (portanza). Questa dipende dalla velocità, dall'estensione della superficie alare, dall'inclinazione dell'ala (angolo d'attacco) e dalla forma del profilo alare ed è generata da una distribuzione delle particelle d'aria sulle due "facce" dell'ala tale da creare sovrapressioni sulla faccia inferiore (intradosso) e depressioni su quella superiore (estradosso). Le depressioni risultano maggiori delle sovrapressioni, per cui la portanza è più il risultato di un "risucchiamento" dell'ala da parte dell'aria che lambisce l'estradosso piuttosto che di una spinta dal basso verso l'alto da parte dell'aria che lambisce l'intradosso. Questa modellizzazione matematica del volo umano è stata formalizzata nel teorema di Kutta- Joukovskij, dovuto al matematico Martin Wilhelm Kutta (1867 - 1944) e all'ingegnere Nikolaj Egorovic Joukovskij (1847

**Fig. 11 - Martin Wilhelm Kutta (1867 - 1944).**

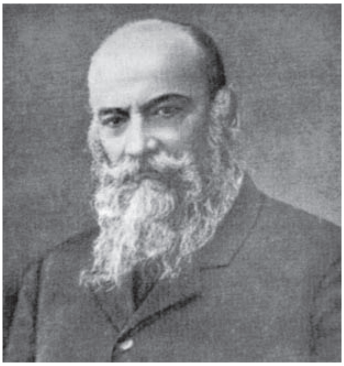

**Fig. 12 - Nikolaj Egorovic Joukovskij (1847 - 1921).**

- 1921).[9] È quella che ha reso possibile la macchina volante, che non è un fatto bensì un artefatto, un ritrovato ingegneristico, che applica una legge della fisica. Dalla teoria al fatto e non viceversa.

La formalizzazione matematica è una luce sulla via epistemica. Trovata infine la cosa, la si concettualizza, raggruppando in un sostantivo le caratteristiche via via emerse.

Occorre una capacità di penetrazione dentro l'essere della cosa, da configurare prima in un costrutto epistemico poi in un modello, fino a quando lo si "veda" teoricamente e si possano raccogliere tutti gli elementi emersi, per racchiuderli nel concetto (dal latino *cum capio,* prendo e metto insieme). L'andar fuori strada è sempre possibile. Insorgono contraddizioni, indeterminazioni e, più insidiosi, circoli viziosi. Circolo vizioso è la proposizione "è bello ciò che rispetta i criteri della bellezza" perché nel definire il "bello" si utilizza lo stesso concetto che si vorrebbe definire ("bellezza").

In questi casi, se si raggiunge la verità della cosa occulta, quella che, pur materiale, si nasconde alla vista, questa verità non è quella della referenza diretta alla cosa o allo stato di cose, secondo il criterio del neopositivismo. Non è una verità fattuale, è inferenziale.

L'evidenza raggiunta con un processo deduttivo è il criterio di verità proprio della coerenza: dall'accertato all'accertabile. Il nuovo accertato si rivela, subito o in seguito, funzionale, nel senso che consente di affrontare e risolvere nuovi problemi o vecchi problemi accantonati. Una funzionalità che non è quella del pragmatismo, poiché non è ricavata da un fatto. È una verità epistemica che diven-

9 Gli scienziati a lui contemporanei dubitavano del volo umano. Joukovskij è considerato il padre della moderna aerodinamica e fu il primo a spiegare matematicamente la portanza aerodinamica di un corpo che si muove attraverso un fluido ideale, cioè privo di attrito. Fondò il primo istituto accademico mondiale di aerodinamica nel 1904 a Kachino, presso Mosca, e costruì la prima galleria del vento in Russia per le prove aerodinamiche.

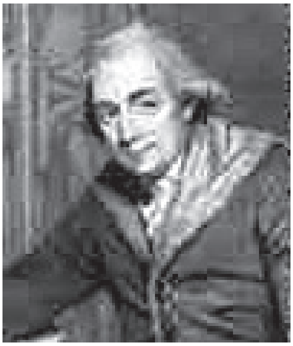

**Fig. 13 - Scipione Dal Ferro (1465-1526).**

ta legge della natura e solo allora si applica come soluzione tecnologica, per risolvere un problema applicativo. La soluzione tecnologica istanzia, nell'applicazione, la legge cui si è fatto ricorso.

Tale è il caso della ricerca - analoga a quella degli enti materiali invisibili, particelle o pianeti - che avviene, in termini puramente teorici, in matematica riguardo a quelle entità non ancora presenti nel mondo matematico, ma sicuramente esistenti in qualche piega della *Mathesis Universalis*. Esemplare è il caso dei numeri immaginari[10] e complessi che, apparsi nel trattamento delle equazioni di terzo grado, consentirono di affrontare anche le equazioni di grado superiore al terzo. Il caso era rimasto aperto per quasi due millenni, essendo noti, ma solo ipoteticamente, ai greci e ad Archimede, che si esercitò su di essi.

**Fig. 14 - Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499-1577).**

La matematica, in quanto linguaggio grammaticale, cioè razionale, possiede una dinamica inferenziale propria. Fu così che i numeri complessi apparvero nel procedimento del calcolo come entità numeriche inaccettabili, composte di due elementi, uno dei quali conteneva un numero immaginario (l'assurda radice quadrata di un numero negativo)  e l'altro un numero reale. Sfidanti, però, per alcune menti geniali delle tante che fiorirono nel XVI secolo: tra le altre, Scipione Dal Ferro (1465-1526), Niccolò Fontana detto Tartaglia (1499-1577), Gerolamo Cardano (1501-1576), Rafael Bombelli (1526-1578) . Tuttavia, pur inizialmente denominate "oggetti sofistici", "caso irriducibile", "quantità silvestri" (selvagge)

10 Sono i numeri che hanno come unità l'unità immaginaria i ovvero la radice quadrata di -1. L'unità immaginaria positiva +i veniva detta "più di meno", quella negativa –i "meno di meno".


**Fig. 15 - Gerolamo Cardano (1501-1576).**

e così via, quelle entità divennero oggetto di riflessione feconda.

Cardano, in polemica con Tartaglia sul problema dell'equazione di terzo grado, creò l'algoritmo della radice quadrata di -15 al quadrato che, risolto, dà -15. Era emersa la possibilità dell'esistenza, formale, e quindi logica, della radice quadrata di un numero negativo. La "quantità sofistica" era diventata, nelle parole di Cardano, «un terzo genere di cosa» durante i suoi tentativi di risolvere l'equazione di secondo grado e di trattare analiticamente le equazioni di terzo e quarto grado.[11] Fortunatamente Bombelli non respinse i numeri immaginari pur non potendone valutare allora l'utilità, emersa invece molto tempo dopo, soprattutto in Elettrotecnica dove essi giocano un ruolo fondamentale come operatori sulle grandezze elettriche. Questa utilità, malgrado l'apparenza assurda dei nuovi numeri, indica che c'è qualcosa sotto il cielo matematico

11 Grazie ad alcune carte in possesso del genero di Dal Ferro è stato possibile appurare che fu questi a trovare per primo la soluzione algebrica dell'equazione di terzo grado nel 1505, ma per un solo caso particolare. Dal Ferro la tenne nascosta, utilizzandola vittoriosamente nelle sfide matematiche che a colpi di indovinelli si tenevano in quel periodo sotto il portico della Chiesa di Santa Maria dei Servi a Bologna. Queste sfide matematiche ricoprivano di credito e prestigio i vincitori, e permettevano loro di godere della protezione dei potenti. Grazie al prestigio guadagnato nelle sfide matematiche Scipione Dal Ferro ottenne lauti aumenti del proprio stipendio, che passò da 25 a 150 lire dal 1496 al 1510. Prima di morire Dal Ferro rivelò la soluzione al suo studente Antonio Maria Fior. Venuto a sapere dell'esistenza di una soluzione algebrica dell'equazione di terzo grado, Nicolò Tartaglia fu stimolato ad applicarsi a tale problema. Non è escluso che si fosse servito della soluzione di Dal Ferro appresa in qualche modo. Tuttavia Tartaglia ebbe il merito di trovare una soluzione algebrica generale dell'equazione di terzo grado. In seguito si organizzò una "disfida matematica" tra Fior e Tartaglia, che si concluse con la vittoria completa di quest'ultimo in quanto tutti i quesiti richiedevano la conoscenza di una soluzione algebrica generale dell'equazione di terzo grado che soltanto Tartaglia possedeva. Gerolamo Cardano, venuto a conoscenza della sfida, invitò Tartaglia con il pretesto di fargli incontrare un mecenate e apprese da lui la soluzione. Nell'opera *Ars Magna* (1545) di Cardano, apparve per la prima volta il metodo solutivo del Tartaglia a questi riconosciuto da Cardano, assieme alla soluzione algebrica dell'equazione di quarto grado trovata da Lodovico Ferrari (1522-1565), assistente di Cardano. Tuttavia nacque un'accesa e gretta controversia tra i due. (Carl B. Boyer, Storia della matematica, pp. 327, 328).

che sfugge alla capacità di osservazione e concettualizzazione del momento. È quell'oltre della verità che si cela dietro più di un velo e che conferma comunque il realismo delle costruzioni teoriche matematiche.

**Fig. 16 - Rafael Bombelli (1526-1578).**

Bombelli intravide in questo espediente risolutivo una luce epistemica e ne trattò nel suo volume, *Algebra*, ove, non solo fece il punto sulla ricerca matematica qual era al momento, ma si propose di «ridurre a perfetto ordine testi poco comprensibili o per la difficultà della materia o per il confuso scrivere de' scrittori». Osservazione sempre attuale. Bombelli accettò senza riserve i numeri complessi e li utilizzò nel trattamento algebrico delle equazioni di terzo e quarto grado. Si era reso conto della necessità di nuovi numeri, per affrontare vecchi, irrisolti problemi. Quando s'imbattè nei numeri immaginari da lui chiamati "silvestri" affermò: «Quello che faccio siamo in cinque a capirlo e nessuno di noi sa se serve a qualcosa». La frase vuole semplicemente mettere in evidenza il carattere fortemente esoterico della matematica e assomiglia a quella che pronunciò l'astrofisico inglese sir Arthur Eddington (1882-1944) a proposito della Teoria della relatività di Einstein subito dopo la sua apparizione, affermando che a capirla erano soltanto lui e altri tre al mondo! Il contributo di Bombelli fu però trascurato, fino a quando, dopo un secolo, fu valorizzato da Leibniz e Cartesio che chiamò "immaginari" i numeri "silvestri" di Bombelli.


L ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DIVISA IN TRE LIBRI
DI RAFAEL BOMBELLI
DA BOLOGNA.
Nouamente posta in luce.
IN BOLOGNA
Nella stamperia di Giouanni Rossi
MDLXXII.
Con Licentia delli RR. VV. del Vesc. & Inquisit.

**Fig. 17 - L'*Algebra* di Rafael Bombelli (1572).**

La strada era ormai aperta e illuminata. Nel 1799 il sommo Carl Johann Friedrich Gauss (1777-1855), nella sua tesi di laurea, *Una nuova dimostrazione del teorema per il quale ogni funzione algebrica in-*

*tegrale di una variabile può essere risolta in fattori di primo o secondo grado*, dimostrò il teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado n ≥1, a coefficienti reali o complessi del tipo: $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ammette almeno una radice complessa o zero.

**Fig. 18 - Carl Johann Friedrich Gauss (1777-1855).**

Seguirono Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel (1802-1829), Leonhard Euler (1707-1783), finché nell'Ottocento i nuovi numeri trovarono applicazione in fisica e in ingegneria, soprattutto in Elettrotecnica dove acquistano un ruolo "reale" di operatori sulle grandezze elettriche rappresentate vettorialmente. Charles Proteus Steinmetz sviluppò nel 1893 una teoria delle correnti alternate con l'utilizzo dei numeri complessi, chiamati in questa applicazione fasori (da fase). Si disse di lui che aveva creato energia elettrica con i numeri.

**Fig. 19 - Paolo Ruffini (1765-1822).**

La storia dei numeri complessi è lunga, articolata e avventurosa. Qui se ne è dato un cenno per un fine specifico: dare un'idea della fenomenologia della scoperta matematica. Quel che sembra particolarmente rilevante è la fecondità epistemica del linguaggio matematico che, per forza interna, apre nuove prospettive di ricerca e fa emergere nuove entità, "silvestri" all'inizio, ma solo perché sono ancora da concettualizzare.

**Fig. 20 - Leonhard Euler (1707-1783).**

Tutti i linguaggi grammaticali sono autofertilizzanti allo stesso modo, ma quello della matematica a un grado superiore, non solo per il fatto di essere più rigoroso, ma anche perché è molto più determinato e preciso rispetto a quello letterario o filosofico. Ciò avviene non soltanto perché la matematica opera nel campo delle quantità e delle loro relazioni esattamente denotabili, ma anche perché si è venuta costituendo come una disciplina partecipativa e cumulativa, in virtù del confronto sistematico nella *koinè* disciplinare, non marcatamente individualistica con la ricerca affannosa della diversità e dell'originalità personale dei cultori, come avviene in altri campi della ricerca.

**Fig. 21 - Niels Henrik Abel (1802-1829).**

Quanto appena detto, non toglie che, di tanto in tanto, emergano tentativi di caratterizzazione personale estrema che però vengono più o meno rapidamente riassorbiti. Tale .il caso della formalizzazione e dell'astrattismo totale del sistema matematico, tentato da Hilbert, Frege, Russell e Whitehead.

## 4 - Il mondo fenomenico

Soffermiamoci ora su quella generalissima classe di cose, percepibili che è il fenomeno.

Diciamo subito che le cose impercepibili, perché immateriali, vengono colte con l'intuizione. Ma anche l'intuizione, così come la percezione e l'evidenza, è soggetta alle ristrettezze, alle distorsioni cognitive e all'offuscamento emozionale del soggetto impegnato nella cognizione.

La fenomenologia husserliana asserisce un darsi delle cose nel loro significato al soggetto conoscente. Ma ciò che si offre nel fenomeno, percepito in atto o già percepito, memorizzato e presente nel vissuto individuale, non è la cosa, è una sua apparizione, «labile come nei sommossi campi del mare spuma o ruga» (Eugenio Montale). Il fenomeno non è dunque la cosa; è il dubbioso ed esitante apparire di una cosa lontana, presente nella profondità dell'Essere o nell'Iperuranio platonico e come tale non percepibile e, per Kant, non conoscibile. L'*epochè*, anche assolutamente rigorosa e totale, non aiuta. Il fenomeno, spogliato dalle sue accidentali qualificazioni o dai giudizi espressi su di esso, consolidati nel saputo e presenti nei vissuti, semplicemente scompare. La cosa in sé o la sua essenza non sono annidate nel fenomeno, né celate dietro di esso; sono altrove nell'iperuranio o in un archetipo cognitivo innato.

Un'analogia, non completa e tuttavia utile, è quella di uno specchio che riflette l'immagine di una cosa che non si trova nello specchio. Se la cosa si sposta, la sua immagine scompare. Questo per dire che l'immagine sullo specchio e la cosa al di fuori di esso hanno come unico punto di contatto l'immagine fino al momento in cui essa viene riflessa. Va segnalato anche il ragionevole dubbio che il fenomeno sia soltanto una elaborazione mentale del percepito e non abbia quindi alcun collegamento con la cosa in sé. Questa interpretazione è di particolare rilevanza nel pensiero matematico, ove gli oggetti costruiti nel campo delle quantità, delle forme e delle loro relazioni, delle formule e dei teoremi che ne derivano, sono una rielaborazione mentale delle intuizioni e delle osservazioni.

Nel linguaggio, il fenomeno è reso con un soggetto grammaticale di predicati e attributi, scomparsi i quali resta un guscio vuoto. La rosa, privata di tutti i suoi attributi, è, al più, un vegetale non qualificato e anche il vegetale, a sua volta, ha bisogno dei suoi attributi, in assenza dei quali diventa "cosa", l'entità più generale e individuabile soltanto come un esistente che inerisce a un essere, del quale possiamo con quasi certezza dire che "è", la potente, impegnativa, indeclinabile tautologia parmenidea.

La cosa-fenomeno e la sua essenza sono quindi nell'altrove inaccessibile dell'Essere.

Questo discorso non tocca però la matematica e le altre scienze della natura che non si muovono al livello dell'Essere, ma soltanto a quello delle relazioni tra le cose del mondo fenomenico, gli esistenti quantitativamente determinati.

Gli assiomi hanno consistenza concettuale e vengono individuati con un'attenta osservazione intellettuale e una profonda meditazione sui rapporti tra le cose che essi descrivono. Ad esempio il fatto che due numeri che hanno il medesimo successore sono uguali universalizza un'esperienza oltre i confini del percepibile.

La certezza degli assiomi è fattuale e può essere sempre revocata in dubbio. Non sono pertanto idee platoniche. La loro è un'esistenza fenomenica. Colgono però aspetti fondativi o massimamente caratterizzanti il campo disciplinare di riferimento. Tali gli assiomi di Peano e quelli di Euclide che tuttavia, nel XIX secolo, furono sottoposti a severa critica.

Nel sistema di Euclide fu preso di mira il quinto postulato, quello della parallela. In tal caso però la critica era scarsamente motivata e le conclusioni che se ne ricavarono non sembrano accettabili come confutazione dell'impianto euclideo.

Protagonisti di questo esercizio furono David Hilbert e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

**Fig. 22 - Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).**

Riemann volle verificare la validità degli assiomi euclidei, passando dalla geometria piana di Euclide a quella sferica. È vero che la superficie terrestre è sferica e sferici o ellissoidali sono i corpi cosmici. Ma è altresì vero che il fatto è irrilevante nelle dimensioni della vita ordinaria. Una superficie terrestre di 100 chilometri quadrati può essere considerata piana senza danno. Riemann, al contrario, assolutizzò la curvatura e affermò che la retta non esiste; non può che essere un arco di cerchio o di altro sferoide e, pertanto gli archi di cerchio su una superficie sferica che convergono ai poli non sono paralleli. Facile obiettare che possono esserlo quelli che non convergono ai poli. Esiste del resto un parallelismo tra curve di questo genere. Tra queste, quelle giacenti sulla superficie dei solidi di rotazione.

Nella geometria iperbolica un fascio di rette che partono da un punto, divergono e quindi non s'incontrano, in quella ellittica avviene il contrario e quindi non ci sono parallele. Si è però cambiato il concetto di parallelismo: in Euclide è bidirezionale, in queste geometrie è unidirezionale. Ciò non toglie che le geometrie non euclidee abbiano senso e utilità applicativa.

**Fig. 23 - Bruno de Finetti (1906-1985).**

Sorge, a questo proposito, un problema particolarmente acuto in ambito matematico, quello della celebrazione del formalismo, dell'astrattismo e dell'assolutizzazione del ragionamento e di concetti introdotti in modo surrettizio. Una sorta di stile della casa. È da ritenere, al contrario, che una certa flessibilità del ragionamento matematico possa essere utile, quando è necessario, per far procedere le cose, aprendo nuove frontiere e puntando all'integrazione tra sistemi, invece della esclusione reciproca. Il probabilismo rigoroso di Bruno de Finetti (1906-1985) è andato in questa direzione. Per lui la probabilità ha un significato soggettivo, essendo il grado di fiducia razionale nel verificarsi di un evento basato sulle informazioni relative a questo possedute dal soggetto. Non esiste pertanto una probabilità oggettiva assoluta ma una probabilità variabile da soggetto a soggetto e anche per lo stesso, ove cambino le informazioni in suo possesso.[12]

È della metà degli anni Cinquanta del secolo scorso il volume di Perelman e Tyteca sull'argomentazione, un processo inferenziale diverso ma complementare al ragionamento inferenziale assoluto.[13] Gli autori hanno fatto posto alla logica del preferibile accanto a quella cartesiana del vero/falso. Nella prefazione all'edizione italiana Norberto Bobbio sostiene che «tra la verità assoluta degli invasati e la non verità degli scettici c'è posto per delle verità da sottoporre a continua revisione, mercé la tecnica di addurre ragioni pro o contro». Più avanti, verranno addotte alcune di queste

**Fig. 24 - Norberto Bobbio (1909-2004).**

12 Cfr. il capitolo *La probabilità non esiste* in Fulvia de Finetti, Luca Nicotra, *Bruno de Finetti: un matematico scomodo*, Livorno, Belforte, 1978, pp. 151-164.

13 Chaïm Perelman, Lucie Olbrechts-Tyteca, *Trattato sull'argomentazione. La nuova retorica,* Torino, Einaudi, 1966.

ragioni pro o contro, al fine di sbloccare una via epistemica sbarrata da una contrapposizione troppo netta.

Le maggiori difficoltà nei tentativi di verificare la consistenza di un sistema assiomatico insorgono nell'utilizzo del metodo ricorsivo o induzione ricorsiva, quello che prolunga una serie all'infinito a partire da un termine detto "base", e aggiungendo indefinitamente altri termini. Va da sé che non è possibile prolungare all'infinito la ricorsività, né sapere cosa succederà dopo l'inevitabile arresto del processo. Per tale motivo il metodo non è considerato valido. Ma se ci si affida alla ragionevolezza, si può avere quella fiducia, raccomandata ai matematici dal filosofo e matematico Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert,[14] che tutto andrà bene anche dopo l'arresto. In ogni caso, un tentativo di dimostrazione non finitista di una serie, può essere salvato, se si ha la ragionevole certezza che la serie sia monotòna, che non cambi cioè natura cammin facendo. Senza contare che se essa lo è per un buon tratto di strada, nella regione del finito, che è la nostra, ci si può contentare.

Un ragionamento analogo vale per i sistemi imperfetti, nel senso di incompleti, quali sono per Gödel tutti quelli logicamente costruiti. Si può sempre o quasi sempre aggiungere liberamente un assioma per colmare l'incompletezza. Ad esempio "zero è un numero" nel sistema assiomatico di Peano, sia pure con qualche condizione come "zero non è preceduto da alcun numero" (nel campo dei numeri positivi) o non è ammesso come divisore.

In matematica la libera creatività ha un suo ruolo. Quel che è bene evitare è confezionare soluzioni tanto sofisticate quanto speciose o di comodo. Tale può essere considerato il tentativo di Hilbert di salvare il blocco dei cinque assiomi di Euclide, trascrivendoli in termini di geometria analitica. "Punto" espresso con una coppia di coordinate cartesiane, "retta" con un'equazione di primo grado a due incognite, "circonferenza" con un'equazione di secondo grado e così via. Ma in tal modo si sposta semplicemente il problema. Non c'è alcuna sicurezza che l'algebra cartesiana sia a sua volta coerente.

Si aprì un'altra strada, quella della dimostrazione "assoluta" di

14 Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert è stato un enciclopedista, matematico, fisico, filosofo e astronomo francese, tra i più importanti protagonisti dell'Illuminismo

coerenza, con un significato di assoluto del tutto peculiare. È assoluta una dimostrazione, all'interno di un sistema coerente, se tutti i teoremi del sistema possono essere dedotti all'interno del sistema, senza ricorrere alla coerenza di un altro sistema come tentato da Hilbert.

Hilbert pose inoltre la necessità, propria della formalizzazione, che gli assiomi, le formule, i teoremi non avessero alcun significato, fossero segni vuoti, come i pezzi e le caselle nel gioco degli scacchi, dove i nomi dei diversi pezzi, re, regina, pedone ecc., servono soltanto a identificare le regole del loro movimento sulla scacchiera. Questo sembra ovvio. Ma non è questo il tipo di "non significato" adottato e all'opera in matematica. È invece un "non significato" che è un significato più profondo, tanto da limitarsi a presupporlo e a darlo per scontato. In una parola, è la *Mathesis Universalis* di Leibniz, vale a dire l'ordine del mondo e la possibilità di descriverlo in un linguaggio matematico esclusivamente denotativo. Il timore di Hilbert era forse che il linguaggio matematico potesse essere turbato dalla connotazione e cioè da giudizi di valore, pericolo che si può tranquillamente ritenere inesistente. Una situazione analoga si ha nel linguaggio verbale, ove la sintassi prescrive le regole di composizione tra i segni dell'alfabeto, tra le parole, tra le frasi, prescindendo totalmente dal significato di ciò che si ottiene.

Il campo del significato, tramite referenza, è quello della semantica, così come avviene con l'applicazione della matematica nella ricerca scientifica e nell'ingegneria. Il confine è preciso. Labile è invece il confine semantico tra assioma e postulato.

L'assioma, dal greco *axios*, degno, è una proposizione che merita di essere creduta, s'intende per la sua verità, ma tacitamente s'intende anche per la sua utilità nella costruzione delle fondamenta di un sistema logico e nella conseguente possibilità di dedurne teoremi validi. Ad esempio, nel sistema assiomatico di Peano si accetta tacitamente che esista sempre, pur approssimandosi all'infinito, il successore di un numero. Un atto di fede.

Il postulato, dall'etimo latino *postulare*, chiedere, è la richiesta a un interlocutore ideale di voler consentire l'accoglimento di una tesi in un ragionamento o in una dottrina. Anche in questo caso, l'accoglimento è frutto di una stipulazione tra matematici e accettata da tutti coloro che utilizzano la matematica. Una fiducia di carattere pragmatico, valida fino a quando la base assiomatica o postulativa regge, e cioè finché non insorgano contraddizioni nel processo inferenziale.

La discussione della base epistemica della matematica mostra come in questo campo, così come in altri ambiti di linguaggio, non domina il rigore assoluto e, ancora, come alcuni passaggi semantici, ad esempio quello tra assioma e postulato e quello sul carattere stipulativo di entrambi, siano da accettare tacitamente, versando acqua nel rigorismo della verità assoluta, quella dei bobbiani invasati.

Uno dei problemi del linguaggio matematico, così come del resto di tutti i linguaggi disciplinari, è la peculiarità del significato di alcuni termini, dati per scontati, mentre invece sono un ostacolo alla comprensione per i non addetti ai lavori. Non aiutano i dizionari specialistici, che adottano altri termini dal significato peculiare, per non dire gergale, nelle spiegazioni in cui compaiono. Così Riemann nella sua sistemazione totalmente formalizzata della matematica, allorquando si propose di mostrarne la coerenza assoluta. Egli reinterpretò la geometria euclidea, trasportandola dalla superficie piana a quella sferica, parlando tranquillamente di "sfera euclidea". Ma sulla superficie sferica la retta era diventata un arco, il quale arco, in quanto tale, non possedeva più alcuna possibilità di parallelismo. Tacque Riemann sul fatto che la sua trasposizione dal piano alla superficie sferica era in realtà una proiezione, nel senso tecnico che questo termine ha in geometria e che comporta, nella trasposizione, profondi cambiamenti come avviene con le proiezioni cartografiche dalla sfera al piano.

Un'altra fonte di equivoco è quella propria della dottrina dei Mondi Possibili.

Sono mondi cognitivi, non epistemicamente costituiti; non sono quindi modelli ricavati dall'osservazione diretta o indiretta, né rispondono a un bisogno naturale della ragione come gli assiomi. Rispondono, in un modo apparentemente plausibile, al bisogno di configurare un ignoto che ha una portata emozionale forte. Tale il caso dell'oltrevita o dell'esistenza di un essere benevolo che si occupi del nostro presente e del nostro futuro. Così nella Grecia antica le dimore dell'Ade o dei Campi Elisi e l'Olimpo, popolato di Dei molto simili all'uomo e pertanto "accessibili" nel senso usuale del termine, nonché reclutabili per una loro presenza attiva su un campo di battaglia. Una complessa mitologia come parte integrante della cultura di un popolo pur così razionale. Anche per Omero la mitologia fu un'ispirazione e una fonte di racconto.

Un criterio di validità di un mondo possibile considerata epistemica, è la sua accessibilità dal mondo reale.

Accessibilità significa pensabilità. Ma il pensare è libero e può essere alimentato da una libera fantasia, totalmente svincolata dal principio di realtà, a meno che non sia quel fantastico che assume una dimensione reale attraverso la figurazione retorica (metafora, immagine, simbolo, metonimia ecc.). Tale il caso dell'*Orlando furioso* dell'Ariosto che, in un linguaggio e con una sceneggiatura fantastica, parla delle passioni umane. Tuttavia, i mondi artistici e letterari non sono "mondi". Sono narrazioni che, nei casi migliori, prendono vita in un universo di discorso e hanno esistenza esclusivamente discorsiva ancorché analoga al mondo reale.

Se invece vengono accettati direttamente come reali, si cade nella sindrome di *Don Chisciotte* che riteneva di vivere nel mondo cavalleresco e, ai nostri giorni, in quella di chi vuole modellare la propria vita sentimentale sul modello della fiction popolare. Pertanto il criterio di verità della dottrina dei mondi possibili che suona "vero in tutti i mondi possibili", non è valido. È valido invece il principio di una ragione argomentativa, governata dagli operatori logici modali – possibile, impossibile, necessario, probabile, preferibile – rilanciato, dopo Aristotele, alla fine degli anni '50, da Perelman e Olbrechts-Tyteca. [15]

Totalmente inaccettabile invece, la pretesa avanzata in un volume del 1979, curato da Aldo Gargani e, tra gli altri autori, Natalia Ginzburg, Remo Bodei, Salvatore Veca, Carlo Augusto Viano.[16] La tesi generale è che bisogna fare spazio nel ragionamento alla vitalità dell'esperienza che distrugge ogni categorizzazione. Questa, sostengono gli autori, è un disciplinamento della vita alla quale viene

15 Chaïm Perelman, Lucie Olbrechts-Tyteca, *Op. cit.*

16 Aldo Gargani (a cura di ), *Crisi della ragione. Nuovi modelli nel rapporto tra sapere e attività umane*, Torino, Einaudi, 1979.

contrapposto un ordine assoluto e predeterminato delle cose, tramite l'assolutezza della logica e della ragione disciplinante e soffocando, in tal modo, gli atteggiamenti e le libere iniziative individuali, dalle quali possono scaturire nuovi linguaggi, nuove grammatiche, nuovi procedimenti costruttivi. Va da sé, che questo "liberi tutti" distruggerebbe l'etica, il diritto, la buona creanza e renderebbe impossibile la matematica, con le disastrose conseguenze sulla possibilità di cogliere l'ordinamento del mondo tramite la scienza che ce lo rende interpretabile.

**Fig. 25 - Carlo Augusto Viano.**

Non poteva mancare il compiacimento dei nostri indisciplinati, già avvenuto a seguito della *Crisi della ragione*, con il passaggio dall'ordine classico di tipo euclideo a quello contemporaneo del relativismo dostoieskiano (sic!) ed einsteiniano.

Il limite di questa impresa garganiana è però evidente ed è logico, quella logica che resiste agli ukase velleitari. Vige tuttora il divieto del pur scettico David Hume (1711-1776), quello di non mescolare, nel ragionamento, lo *is* e l'*ought*, l'essere e il dover essere, l'epistemico e il valoriale. Non sono neanche assenti nel volume gli scivoloni che negano, di fatto, la crisi della ragione, come quando si celebra la ricerca scientifica come garanzia di progresso e di lotta all'oscurantismo, senza che nessuno degli autori chiarisca come si fa scienza senza la ragione. Esemplare del complessivo debolismo di questa *Crisi della ragione*, la conclusione del contributo di Carlo Augusto Viano che chiude il volume:

> Oggi la teoria della ragione si presenta come una teoria della credenza che pretende di essere sapere [mentre essa] oscilla sempre tra la ricerca di un sapere supremo e la convivenza con credi determinati: è quasi sempre il tentativo di dar forma di sapere universale alle giustificazioni che s'invocano per credenze particolari .[17]

17 Ibidem, p. 349.

Traspare qui una nostalgia per il vituperato sapere forte e un rammarico per la gramigna delle credenze particolari. Possiamo restare tranquilli. La matematica e le scienze altre hanno resistito a queste lusinghe. La scienza continua a rispecchiare e interpretare il *kosmos* greco. La matematica non è però chiusa in un suo guscio. La tematica dei mondi possibili è presente e si concretizza quelle volte in cui, o per lo sviluppo proprio del calcolo, o per l'intuizione del ricercatore, si configurano entità matematiche nuove e, nelle parole di Bombelli, silvestri.

Il primo caso è stato quello dei numeri immaginari, il secondo quello delle geometrie non euclidee, il terzo quello dei numeri transfiniti. In questi casi si ha una immediata mobilitazione della comunità scientifica, si apre un dibattito e si giunge, di solito, a una soluzione condivisa, in vista della quale anche gli oppositori cedono le armi.

Emerge qui il delicato problema delle forme spontanee di conoscenza: intuizione ed evidenza. In matematica l'intuizione, da non confondere con l'intuizionismo che è sinonimo di costruttivismo, porta a escludere dall'universo di discorso il principio di continuità, quello del terzo escluso e quello dell'infinito attuale. In alcune filosofie si ritiene vero ciò che appare evidente, contro ciò che si raggiunge con mediazioni logiche e strumentali complesse.

Nella fenomenologia husserliana l'evidenza è centrale. Vi si afferma che le cose si danno alla nostra cognizione e, con la riduzione eidetica, evidenziano la loro essenza. Alla base c'è una visione "originariamente offerente", il darsi della cosa alla coscienza-conoscenza. Ciò in base al principio di tutti principi: «...ogni visione originariamente offerente è sorgente legittima di conoscenza. Tutto ciò che si dà originalmente nell'intuizione, per così dire in carne e ossa, è da assumere come esso si dà». L'unica condizione è la limpidezza della percezione che spesso è però divergente tra gli osservatori. Si può superare la divergenza – Husserl ne è convinto – con la costituzione intersoggettiva e con l'empatia, l'interesse per e la capacità di conoscere gli stati di coscienza dei propri interlocutori. Raramente accade che questa consapevolezza induca a riconoscere le ragioni dell'altro. Di solito la si usa per affilare le armi per un confronto dialettico, teso a rafforzare la propria posizione.

## 5 - La matematica, scienza cumulativa

Al contrario, in campo matematico è attiva la comunità scientifica e il confronto dialettico sistematico e costruttivo. Una sede istituzionale per questo confronto sono i congressi internazionali. Abbiamo già accennato all'incontro fra Russell e Peano al Congresso Internazionale di Filosofia di Parigi nel 1900, che portò al concepimento dei *Principia Mathematica* di Russell- Whitehead. È vero che la prima comunicazione pubblica dei suoi teoremi di incompletezza dei sistemi formalizzati, cioè logici, resa da Gödel nel 1930 al *Mathematische Kolloquium* di Menger, suscitò perplessità e dubbi, ma il confronto ben presto li eliminò. Una differenza di costume e di abito mentale che si concretizza in un ragionamento in cui prevale la dimostrazione sulla visione. Al contrario nella ricerca filosofica si cerca l'originalità ad ogni costo e non si valorizza il contributo dei predecessori. Altra differenza è che i matematici, come già detto, non cercano l'essenza delle cose e la verità assoluta; cercano, in primo luogo, l'individuazione degli enti matematici, quella per cui una cosa è quel che è e non un'altra; in secondo luogo, "soltanto" la consistenza di sistemi ove sono configurate relazioni tra entità quantitative. Questa diversità di atteggiamento è un serio ostacolo a un dialogo costruttivo tra le due culture della natura e dello spirito.

Le geometrie non euclidee sono nate dal tentativo di perfezionare quella euclidea, la quale, pur nella sua genialità, conduceva a errori e ricorreva, spesso, a presupposti sottaciuti nel corso delle dimostrazioni. Ciò non toglie nulla alla gloria della rivoluzione gnoseologica operata dai greci in generale e nella fondazione dell'epistemologia scientifica in particolare. Da ricordare, in primo luogo, il concetto di verità da cercare nel cosmo e non recepire passivamente dalla tradizione, dal mito, da un qualche occasionale pronunciamento divino per via diretta o tramite oracolo. Al contrario, si impose razionalmente la verità come *aletheia*, disvelamento, liberando la cosa dalle apparenze contingenti del fenomeno.

C'è in matematica un modo originale di corteggiare la verità nascosta e che appare talvolta ritrosa, prima del disvelamento. È il porre nuovi problemi o aprirne di vecchi non risolti, tenendo presente

**Fig. 26 - Benedetto Croce (1866-1952).**

che “problema” è la formulazione coerente di una o più domande plausibili. Si affronta un problema anzitutto, chiedendosi se esso può avere soluzioni, cioè risposte alla o alle domande, una o più, ma sempre in numero finito. La “corte” ha successo nel momento in cui, con il metodo dimostrativo, si comincia a cercare la o le risposte.

Una risposta di notevole importanza è la scoperta di nuovi tipi di numero: logaritmi, numeri immaginari, numeri transfiniti, ecc. Alcuni, come i transfiniti, danno luogo a paradossi come quello tipicodell’infinito: il tutto è uguale a una sua parte. Non importa; occorre accettare la stranezza in onore del fatto che il cielo contiene più cose di quante ce ne siano nelle teste dei filosofi, intendendo questo termine in senso lato. Succede che i nuovi numeri semplificano i calcoli o consentono di trattare problemi nuovi o vecchi accantonati, in assenza di un metodo. È l’avventura di *aletheia* (scoperta) termine da accettare nel suo significato letterale, che prima abbiamo chiamato disvelamento. Sembrerebbe questa una impostazione funzionalista: è valida un’asserzione se si aggiunge alle proposizioni che possano entrare come tesi in un sistema e, inoltre, trovino applicazione nella scienza e nell’ingegneria: una verità pragmatica e non aletica, in linea con il pragmatismo made in USA che sostiene che è vero ciò che funziona. Ma ciò che funziona non è né vero né falso; è l’applicazione di una teoria vera o di una legge scientifica teoricamente corroborata.

Un posizione più drastica è quella di Aristotele, ripresa nel Novecento da Benedetto Croce (1866-1952). Vale la pena di ricordarle entrambe, poiché ancora oggi vengono professate in ambito filosofico.

Aristotele sostenne che i fenomeni naturali sono caratterizzati da una qualità specifica individuale. Ogni cosa della natura è uno di uno, non uno di molti. La matematica, al contrario, ordina la realtà quantitativamente e per classi e non può pertanto trovare applicazione in natura.

Benedetto Croce riprese questa dottrina e la portò a estreme conseguenze, esprimendola e diffondendola con la sua abituale supponenza. Qui di seguito un piccolo saggio:

> Le conoscenze scientifiche non sono vere conoscenze, ma dispositivi di ordine pratico. I relativi concetti sono pseudoconcetti, "adatti agli ingegni minuti non alle menti universali dei filosofi idealisti".

Si espresse così il 6 aprile 1911 al Congresso della Società Filosofica Italiana, rivolgendosi, pur da ospite, al fondatore e presidente Federigo Enriques, matematico, storico della scienza e filosofo, che aveva lamentato la rovinosa contrapposizione tra scienze della natura e scienze dello spirito.

In tutti i suoi scritti il Croce affetta la sua sicurezza in termini sprezzanti e rifiutando pregiudizialmente ogni confronto:

> Gli uomini di scienza [...] sono l'incarnazione della barbarie mentale, proveniente dalla sostituzione di schemi a concetti, di mucchietti di notizie all'organismo filosofico-storico.[18]

Sulle contemporanee scoperte e sistemazioni concettuali di Frege, Peano, Russell, così si esprime:

> I nuovi congegni [della logica matematica] sono da raccomandarsi se mai ai commessi viaggiatori [di modo che] persuadano dell'utilità della nuova merce e l'acquistino clienti e mercanti [...] la loro nullità filosofica rimane [...] pienamente provata.[19]

E ancora un'altra sfaccettatura del pensiero del Vate:

> [I cultori del] Le scienze naturali e delle discipline matematiche [...] confessano che i loro concetti sono di comodo e di pratica utilità; che non hanno niente da vedere con la meditazione del vero.[20]

---

18 Benedetto Croce, *Il risveglio filosofico e la cultura italiana*, in «La Critica. Rivista di Letteratura, Storia e Filosofia», n. 6, 1908, pp. 161-168.

19 Benedetto Croce, *Logica come Scienza del Concetto Puro*, Bari, G. Laterza e Figli, 1909.

20 Benedetto Croce, *Indagine su Hegel e schiarimenti filosofici,* 1952.

**Fig. 27 - Federigo Enriques (1871-1946).**

In particolare Croce, riprendendo Aristotele, sostiene che le verità scientifiche non ci dicono nulla sull'uomo concreto, sulla sua singolarità e differenza ontologica rispetto al resto della Natura e che i concetti scientifici non sono universali. Queste affermazioni sono frutto di una penosa misconoscenza dell'indagine scientifica, soprattutto riguardo all'uomo concreto, aspetto che non rientra nel campo della scienza. Quanto invece all'universalità dei concetti scientifici, questi lo sono nel loro campo, quello della natura, e si concretizzano nelle leggi, ad esempio la gravitazione universale.

Questo spazio dedicato a Croce, si giustifica per l'impatto pressoché totalitario avuto dalle sue idee sulla cultura italiana e sull'insegnamento scolastico a tutti i livelli. È singolare che crociani fossero, tramite Marx, i marxiani e i marxisti, ciò a causa della valorizzazione marxiana del sistema di Hegel. Quasi contemporaneamente le stesse valutazioni sulla scienza, senza la volgarità e il pressappochismo crociano, furono professate da Edmund Husserl (1859-1938), il quale disse di Galilei «Il genio che scopre e allo stesso tempo occulta». Anche qui però una sottovalutazione: Galilei fu fisico, astronomo e matematico con una solida base filosofica, riguardante la natura e la sua ontologia. Lo stesso Croce riconobbe in lui il filosofo in quanto metodologo.[21] Con una lodevole autolimitazione le sue tesi riguar-

21 «Non dunque in qualità di assertore del positivismo filosofico, figura che non gli appartiene e che appartiene piuttosto all'immaginazione dei positivisti dell'Ottocento, ma in quanto metodologo egli è filosofo, come si sente dal modo in cui sono condotte le sue esposizioni e polemiche, nelle quali vibra l'animo del filosofo, e le stesse scoperte fisiche, che vi sono illustrate e difese, prendono sovente l'aspetto di esempi di qualcosa che le genera e le supera: la teoria del metodo fisico-matematico» (Benedetto Croce, Storia dell'età barocca in Italia, Bari, Laterza, 1967, p. 62). Aggiunge però Domenico Galati in *Galileo, primario matematico e filosofo*, Roma, Pagoda, 1991, p. 420 nota 6: «Si noti, tuttavia, che tali asserzioni del Croce sono prive di analisi testuali. Uno studioso che dedicò anni a pubblicare bazzecole su autori sconosciuti e di nessun conto, non studiò filosofi italiani come Galileo e Rosmini, che sono superiori a tutti i filosofi tedeschi».

Fig. 28- Edmund Husserl (1859-1938).

dano l'aspetto fisico della natura e della realtà. Non gli si può rimproverare pertanto di non coprire con la sua ricerca l'uomo concreto. Non rientra nel suo programma.

È una diatriba, questa delle due culture, che ha dell'assurdo, si trascina da troppo tempo e affligge soprattutto il nostro Paese. La cultura, se vera, è e non può che essere una. Purtroppo la reazione degli uomini di scienza è stata ed è ancora debole, impacciata. Esemplare al riguardo la debole risposta di Enriques a Croce.

Due i motivi. In primo luogo, un'epistemologia scientifica ancora intrisa di positivismo. In secondo luogo, il timore di essere accusati di metafisicismo. S'ignora, da ambo le parti, che una componente metafisica è presente in ogni impresa conoscitiva e, precisamente ogni qualvolta è in gioco il significato. Nella scienza sono metafisiche le verità fondamentali e in particolare, in matematica, non poche asserzioni metamatematiche, nel senso di giudizi su operazioni matematiche quali calcolo, coerenza, dimostrazione, impianto assiomatico.

È singolare però, e questo andrebbe ribattuto ai filosofi oracolari come Croce, il fatto che la matematica abbia risolto con i suoi mezzi problemi che la filosofia aveva accantonato come intrattabili. Tale il caso dell'infinito (quantità infinita o infinitamente divisibile); sia l'infinitamente piccolo sia l'infinitamente grande.

Il primo caso aveva generato il paradosso di Zenone di Elea (V sec. a. C.), il secondo l'impossibilità, statuita da Aristotele, di poter concepire l'infinito attuale. Soltanto l'infinito potenziale poteva essere concepito. Ma questa è una fallacia, in quanto spezza la consequenzialità ontologica tra potenza e atto, statuita dal medesimo Aristotele.

I greci erano turbati dall'idea di infinito. Pitagora lo fu al cospetto dell'infinità delle cifre dopo la virgola di Π, fino a proibire ai discepoli di divulgare questa notizia. La rivoluzione scientifica del XVII

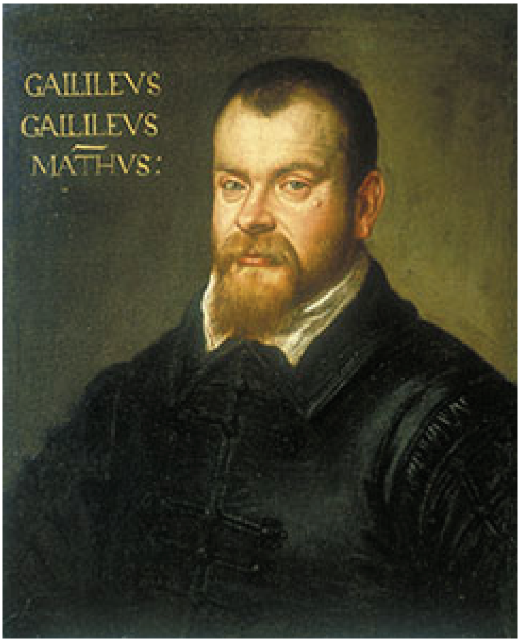


Fig. 29 - Tintoretto, Galileo Galilei (1606).

secolo rese razionalmente accettabile l'idea d'infinito attuale.

Galilei "vide" l'infinito in atto nell'infinita divisibilità di un segmento come successione di infiniti punti, e nel numero infinito, in atto, degli infiniti lati di un poligono, inscritto in o circoscritto ad un cerchio.

Un secolo dopo Leibniz e Newton creavano il calcolo infinitesimale, operante su quantità indefinitamente piccole. Ancora un secolo e il grande matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) mostrava la numerabilità degli insiemi di infiniti elementi, denominati da numeri naturali razionali e irrazionali. Individuò così il paradosso che l'insieme risultante dalla somma di tutti i sottoinsiemi di un insieme C è maggiore di C. Creò la serie di insiemi infiniti, e tuttavia diversi per numerosità, chiamò i numeri designanti questa numerosità transfiniti e ne concepì un calcolo.

Infine, il concetto di limite di una funzione promuoveva dalla potenza all'atto una successione di infinitesimi inclusi in un dominio funzionale.

Definitivamente superato il divieto aristotelico di tematizzare l'infinito attuale, in quanto generante contraddizioni logiche. Cantor mostrò che ciò accadeva, quando non si teneva presente che l'universo matematico è strutturato in regioni ontologiche nelle quali vigono logiche diverse. Da qui la figura di una "verità regionale".

Questa qualificazione è solo apparentemente riduttiva, nel senso del debolismo filosofico contemporaneo, poiché la limitazione riguarda l'universo di discorso e non la natura delle entità coinvolte.

**Fig. 30 - Georg Cantor (1845-1918).**

Da qui anche una considerazione sullo statuto epistemico della logica che non è espressione della natura delle cose cui si applica, ma la grammatica di un discorso su di esse. In quanto tale, può essere occasionalmente applicata a un'espressione a-semantica ed esprimere discorsivamente un *non sense*. Tale la frase di Avram Noam Chomsky «Le idee verdi senza colore dormono furiosamente», che smentisce il criterio neopositivista secondo cui è vera una frase ben formata, cioè sintatticamente ineccepibile.

Cantor era cattolico osservante e si preoccupò di sottoporre la sua scoperta al Sant'Uffizio. Il cardinale che lo presiedeva, non sapendo di matematica, incaricò i Domenicani di studiarla, i quali, dopo due anni, conclusero che non c'era alcun problema per la fede. A una condizione, precisò il cardinale, che Lei non usi la parola "assoluto". Non è una parola matematica, replicò Cantor e, rassicurato, chiamò i nuovi numeri "transfiniti cardinali".

Visto che siamo finiti a occuparci di numeri strani e vista l'importanza del numero nella matematica, una precisazione può esser utile.

Può apparire paradossale, ma la matematica non è la scienza dei numeri così come la letteratura non è la scienza delle parole e così come non lo è la linguistica.

La letteratura e le arti, in generale, non sono l'arte della scrittura, quali che siano i mezzi di essa, parole o altri segni. Possiamo addirittura dire che lo scrittore non scrive; trascrive qualcosa di valore letterario che ha visto nel mondo e che, a suo giudizio, vale la pena di individuare, precisare, esprimere letterariamente, comunicare. Qual è il valore della cosa vista e trascritta? Quella che contiene la traccia di una verità assoluta, *clara*, nell'espressione di Tommaso, tale che possa scuotere intellettualmente ed emotivamente il lettore, fornendogli un nuovo punto di vista sul mondo. Lo ha fatto anche

Bombelli con i numeri immaginari e Cantor con i transfiniti.

L'occhio del matematico è però specialistico; vede di preferenza il quantitativo in tutte le sue forme e "confezioni", quali classi, insiemi, serie, figure geometriche ecc. I numeri, come efficaci segni di denotazione delle quantità e delle loro relazioni, sono nati da un'astrazione operata ignorando la natura particolare delle cose, la loro specifica qualità: pere, galassie o particelle subatomiche. Si trascura non solo il fatto di cosa siano le cose, ma anche di come siano disposte, a che servono. Resta qualcosa che è comune a tutte le cose, dalla pera alla galassia e alla particella subatomica: la loro possibile aggregazione in un contenitore, classe, insieme, serie ecc., e la loro numerosità. A dire il vero, si può anche tener conto della qualità degli oggetti, quando si creano insiemi per tipo di componenti, in base a una caratterizzazione dei *Principia Mathematica* alla quale rinvio. Da qui la definizione di Frege: "numero è la classe di tutte le classi equipotenti", che hanno la stessa numerosità, per valutare la quale non serve il numero. Basta una serie di indicatori qualsivoglia, inizialmente sassolini, in latino *calculi*, da mettere in corrispondenza biunivoca, con le cose di un insieme di cui si vuole accertare la numerosità.

La matematica è anche una scienza sperimentale, nel senso che l'osservazione della realtà oggettiva, sotto l'aspetto quantitativo, suggerisce il bisogno di cercare delle leggi che governano la connessione tra le quantità osservate.

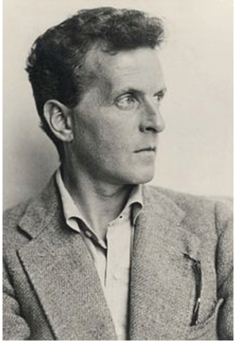

**Fig. 31 - Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951).**

Un cenno va fatto all'ambizioso tentativo di Hilbert, parallelo a quello di Frege, di formalizzare interamente, logicizzare l'intero edificio matematico. Volevano creare un sistema teorico di segni collegati da regole bastanti a se stesse, per così dire, non aventi altro significato che quello del loro rapporto logico o formale con altri segni del sistema, nel senso di non riguardanti la qualità delle cose. Fu il sogno del neopositivismo logico, condiviso da Ludwig Josef Johann Wittgenstein

(1889-1951)[22] nel *Tractatus* (1916), dismesso nelle *Ricerche Filosofiche* (1953), demolito già all'inizio degli anni '30 da Gödel con i due teoremi di incompletezza di ogni sistema formale.

Hilbert fu tra i primi a comprendere e accettare la portata dirompente della scoperta gödeliana e, conseguentemente, la scissione tra «ciò che è vero e ciò che è dimostrabile […] l'equivalenza dei due piani», che era l'obiettivo cui mirava la sua ricerca di una prova di coerenza del sistema. Da qui ciò «che Hilbert non ha fatto o sperava comunque di non dover fare, la distinzione tra verità e dimostrabilità».[23]

Questa distinzione ha senso, anzi è necessaria, se si rinuncia a sopravvalutare la logica, il metodo e la dimostrazione che rende operativo il metodo fondato su una logica, ritenuta essa stessa una verità delle cose e non soltanto, come essa è, l'ordinamento formale di un discorso sulle cose, una grammatica.

**Fig. 32 - Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831).**

Il più illustre esponente di questa assolutizzazione della logica fu Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), pedissequamente seguito dai neopositivisti.

Hegel aveva conferito statuto ontologico alla logica che, in quanto tale, gli apparve essere il motore immoto della dialettica, produttrice delle sintesi parziali e della sintesi finale, quella della fine della storia che lui stesso intravide e proclamò, l'Idea Assoluta, e cioè la verità dell'Essere, garantita dalla indefettibilità del Metodo, quello dialettico, che non è più un dispositivo processuale di carattere tecnico, ma il *noûs* che governa la dinamica della storia che esprime e realizza il progresso della realtà e, al suo interno, della società. .

22 Ludwig Josef Johann Wittgenstein è stato un filosofo, ingegnere e logico austriaco, autore in particolare di contributi di capitale importanza alla fondazione della logica e alla filosofia del linguaggio

23 Enrico Moriconi, *La Teoria della Dimostrazione di Hilbert,* Napoli, Bibliopolis, 1988, p. 16.

È questo un fantasma che aleggia anche sulla matematica e suggerisce assolutizzazioni come quella tentata da Hilbert e smontata, in contemporanea, da Gödel.

Riporto un semplicissimo esempio che rivela il carattere processuale e neutrale della logica rispetto alla verità, al significato e al valore. Queste entità, pur rientrando nello stesso discorso in cui è presente un'applicazione logica, appartengono a uno strato di realtà che trascende quello del discorso.

L'esempio è una formula algebrica che illustra un teorema organizzativo riguardante l'impresa industriale.

L'argomento è il clima delle relazioni umane all'interno di un sistema aziendale, clima da cui, s' ipotizza, dipenda in notevole misura la performance aziendale.

Al riguardo, vigono due orientamenti, quello disciplinare del controllo e della sanzione e quello conviviale della partecipazione e della collaborazione. La scelta dell'uno o dell'altro modello dipende dall'orientamento personale del gestore che, nella scelta, rispecchia le sue tendenze, credenze, valori, ubbìe, nonché sentimenti d'insicurezza o, al contrario, di fiducia. Negli altri e non soltanto in se stesso.

Se si volesse formalizzare il sistema aziendale, si potrebbero assumere alcune di tali entità come assiomi. Si tratta infatti di qualcosa che rientra in un orientamento personale che non può essere valutato in termini di razionalità formale e non può essere dedotto da altro. Siamo in presenza di verità fondamentali.

Dall'orientamento personale discende dunque l'adozione di uno dei due modelli contrapposti: l'istituzione totale, che ha come riferimento semantico la caserma, oppure il mondo vitale che ha come riferimento semantico il convivio. Nel primo caso la formula che rispecchia il modello è P x S = K; nel secondo caso P/S = K (P = pressione di controllo, S = sabotaggio, K è una costante). Entrambe le formule sono logiche, ma non c'è modo di stabilire, da un punto di vista logico, quale di essa sia razionalmente da preferire. La preferenza dipende da una metateoria sull'impresa che, a sua volta dipende, nella sua formulazione, da un orientamento personale.

La metateoria può sostenere con buone ragioni che il sabotaggio è invisibile e la pressione è visibile e che quindi, nel confronto, il sabotaggio è favorito; ma ciò non convincerà il sospettoso. In conclusione, la logica non ha nulla a che fare con l'essere delle cose, ma soltanto con l'ordine di un discorso sulle cose, il quale ordine è tanto efficiente nella sintattica del discorso, quanto cieco nel campo della semantica.

### 6 - L'incompletezza dei sistemi assiomatici

Kürt Gödel, nel ragionamento che lo portò ai suoi due famosi teoremi di incompletezza dei sistemi assiomatici ebbe tre riferimenti: l'*Aritmetica* di Peano, i *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead, la *Teoria della Dimostrazione* di Hilbert. Soffermiamoci su quest'ultima.

Hilbert riteneva di essere pervenuto a un risultato che riteneva un punto fermo: la dimostrazione assoluta della coerenza o consistenza di un sistema assiomatico, vale a dire la dimostrazione della sua consistenza senza far ricorso alla consistenza di un altro sistema.

Per effettuare questa verifica, occorre formalizzare totalmente il sistema, vale a dire privare le sue espressioni o formule di ogni significato referenziale, nel senso di riferibilità a un qualcosa fuori del sistema. L'insieme di espressioni che così si ottiene è un calcolo e cioè la possibilità di mettere in relazione tra loro i segni e le espressioni del sistema, in base a regole prestabilite che sono la grammatica del sistema o meglio del suo linguaggio.

Siamo in presenza del modello epistemologico dello strutturalismo che negli anni Trenta del secolo scorso cominciava a far capolino, imponendosi come forma descrittiva e chiave interpretativa in tutti i campi del sapere.

Sistemi formalizzati di tal fatta, di puri segni, sono i giochi combinatori con le carte o con i pezzi di una scacchiera. Gli appellativi re, regina, fante, torre, pedone sono mere denominazioni che designano soltanto le loro funzioni nel gioco e il valore quantitativo, nel senso di quanto vale nel gioco, una carta o un pezzo. L'attribuzione di un significato, nel mondo e nella vita, alle figure dei tarocchi è un esercizio privo di fondamento. Non così per le note di una composizione musicale o per le parole di uno scritto informativo o letterario.

Attenzione, però! Si può generare il *Parolibero* o la *Divina Commedia*, a seconda che ci si fermi alla sintassi o si acceda alla semantica.

Tornando ai sistemi matematici totalmente formalizzati, hilbertiani, se essi sono ben costruiti, completi, eleganti, trovano applicazione nelle scienze e nella descrizione interpretativa della natura. Ma questa corrispondenza, avverte lo stesso Hilbert, appartiene alla metamatematica, che è un discorso interpretativo-valutativo sulla matematica. Ad esempio. 0 = 0, 0 ≠ 1 sono formule matematiche, invece il primo postulato del sistema di Peano "zero è un numero" è un'asserzione metamatematica.

La dimostrazione vige ed è producibile nel campo della sintattica, l'asseverazione, asserire che una proposizione è vera o falsa, è invece producibile nel campo della semantica. Una frase sintattica che rispecchia e rispetta le regole della grammatica può non avere alcun significato, pur essendo corretta come la frase di Chomsky, mentre il teorema di Euclide sull'inesistenza del più grande numero primo è vero e dimostrato in base al principio di ricorsività. Al contrario, frasi anche grammaticalmente imperfette, possono essere vere come quelle pronunciate in una lingua malconosciuta. Tale la frase rivolta ai romani da Giovanni Paolo II subito dopo l'incoronazione: «Se sbaglio, mi corriggerete». Sono vere anche le frasi pronunciate in un delirio, preziose, anzi, per il tentativo diagnostico di uno psichiatra.

**Fig. 33 - Kürt Gödel (1906-1978).**

Gödel mostrò altresì che il discorso matematico non va separato da quello metamatematico e che la consistenza di un sistema, nonché il suo interesse, non possono prescindere da considerazioni asseverative e quindi metamatematiche. In caso contrario, si consegue un rigore privo di verità, fine a se stesso. Se si aggiungono altri assiomi, quanti si vuole, proseguì l'implacabile Gödel, si può dimostrare un teorema vero e fino al momento indimostrabile, ma ne insorgerebbero altri affetti dalla stessa limitazione.

Possiamo chiederci ora come ha potuto Gödel evitare di cadere nella trappola che lui stesso aveva montato e nella quale finì Hilbert. Semplice: passando dalla matematica alla metamatematica e ragionando liberamente in modo filosofico, non finitista, non legato alla consistenza formale, interpretando la logica non ontologicamente ma grammaticalmente, vale a dire come una regola afferente al discorso sulla realtà ma non alla realtà.

L'errore di Hegel e di tutti i pensatori oracolari è quello di considerare la logica come un ordine della realtà e non di un discorso sulla realtà. Ciò non toglie che la realtà sia ordinata, non è caotica, ma di un ordine che è compatibile con un discorso logico ma lo eccede. La matematica deve accettare questa eccedenza formalizzandola nell'ambito della ragionevolezza, ove vige anche l'intuizione e la visione e non soltanto la descrizione. Avviene ordinariamente nell'individuazione degli assiomi. Questa completezza, che supera l'incompletezza di Gödel , e che fu da lui ben accettata, caratterizza anche il confine attraversabile tra scienze della natura e scienze dello spirito, in buona sostanza tra Arte e Scienza.

Anche nell'uso ordinario del linguaggio, grammaticale quanto si vuole, ci s'imbatte nell'ineffabile, quando la capacità espressiva del linguaggio ha raggiunto il suo limite. Si ricorre allora al linguaggio figurato della retorica: allusivo, evocativo, e non soltanto descrittivo, che rende intuibile l'ineffabile.

Un esempio magistrale è nella chiusa del racconto *Il morto* di Joyce. Vi è rappresentata la forza inesorabile della natura che a tutto e a tutti dà la vita, a tutti la toglie, tutto e tutti livella. È la volta del protagonista del racconto, il giovane professionista di successo, Gabriel:

> La sua anima veniva lentamente meno, mentre udiva (sinestesia)
> la neve cadere lentamente per tutto l'universo e lentamente cadere,
> come una discesa verso la loro ultima fine, su tutti i viventi e i morti.

L'inversione di «cadere e lentamente» è la figura retorica del *poliptòto* che vede la stessa parola usata, a breve distanza, in funzioni diverse. "Lentamente" nel primo uso è descrittivo, nel secondo evocativo della inesorabile forza distruttiva della soffice, leggera neve. Nel primo uso "lentamente" è linguistico, nel secondo metalinguistico.

Gödel era un realista puro. La conoscenza è scoperta, scoperta a volte creativa, ma non creazione dal nulla.

Vale per le entità matematiche. La perfezione delle figure geometriche o delle dimostrazioni impeccabili, così come una realizzazione artistica, non è pura costruzione intellettuale o prodotto di una libera fantasia, bensì il riconoscimento di un dato profondo di realtà. Lo stesso Gödel dichiara:

> Gli insiemi e i concetti matematici sono da ritenere oggetti reali […] esistenti indipendentemente dalle nostre definizioni e dalle nostre costruzioni. Mi sembra che ammettere l'esistenza di tali oggetti è altrettanto legittimo quanto ammettere l'esistenza dei corpi fisici e ci sono tante ragioni di credere alla loro esistenza, quanta ce n'è di credere all'esistenza dei corpi fisici. [24]

Il primo teorema di incompletezza di Gödel asserisce che *in ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula φ tale che, se T è coerente, allora né φ né la sua negazione ⌐ φ sono dimostrabili in T*. In altre parole, è possibile costruire in T una proposizione sintatticamente corretta (logicamente valida) che non è né vera né falsa. Gödel precisa che il teorema vale «per ogni teoria affine» cioè per qualsivoglia teoria formalizzata e non soltanto matematica.

Il precedente teorema viene completato con il secondo teorema di incompletezza di Gödel secondo il quale *se la teoria matematica T è coerente, non è possibile provarne la coerenza all'interno di T.* I due teoremi affermano, in conclusione, che i sistemi assiomatici (che contengono l'aritmetica nella quale il numero naturale è definito come insieme) non possono essere coerenti e completi: infatti se il sistema è coerente non è completo in quanto esiste almeno una proposizione non dimostrabile utilizzando gli assiomi e i teoremi del sistema stesso: la consistenza del sistema.

Questi due teoremi infransero il sogno che Hilbert aveva espresso con il suo "secondo problema" presentato al Secondo Congresso

24 Kürt Gödel, *The mathematical logic of Russell*. In: *The philosophy of Bertrand Russell*, Evanston and Chicago Press, 1944, p. 137.

Internazionale dei Matematici tenutosi a Parigi nel 1900: dimostrare direttamente la consistenza della teoria dei numeri, reali o interi. Cosa voleva dire Hilbert con l'avverbio "direttamente"? Hilbert si era impegnato in prima persona nel processo di assiomatizzazione di varie branche della matematica ma la consistenza dei vari sistemi ipotetico-deduttivi che ne erano nati veniva ricondotta a quella di un altro sistema e così via fino ad arrivare alla teoria dei numeri interi cioè l'aritmetica.

Nel secondo punto della sua lista dei famosi 23 problemi matematici ancora irrisolti che Hilbert aveva presentato al Congresso di Parigi si chiedeva di dimostrare infine la consistenza dell' aritmetica senza più ricorrere ad altro sistema ma rimanendo all'interno dell'aritmetica stessa. Se vi si fosse riusciti si sarebbe realizzato il sogno di Hibert di spacchettare, per così dire, un sistema formalizzato complesso, riducendolo a sottosistemi aritmetici semplici, all'interno dei quali poter dimostrare i teoremi più complessi del sistema madre.

**Ringraziamenti**

*Un particolare ringraziamento all'ing. Luca Nicotra per la revisione del testo che ha contribuito a migliorare in alcuni punti e nella sua stesura globale.*

ArteScienza

**Rivista telematica semestrale**
http://www.assculturale-arte-scienza.it
**Direttore Responsabile: Luca Nicotra**
**Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi**
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"