La verità in matematica: da assoluta a relativa

Luca Nicotra*

Sunto: *L'articolo ripercorre l'iter dei mutamenti del pensiero matematico, dalla concezione platonica della verità matematica assoluta alla concezione della matematica pura: insieme di sistemi ipotetico-deduttivi, costituiti da proposizioni derivate logicamente da poche proposizioni iniziali di cui si "postula" la verità. In matematica la verità da assoluta è diventata relativa, con valore soltanto sintattico di coerenza con gli assiomi, senza necessità di un valore semantico. In questo mutamento si è visto l'abbandono del platonismo matematico a favore di una matematica come libera creazione del nostro pensiero. Ma è proprio così? O forse non è una conferma del platonismo matematico universalizzato in maniera parmenidea?*

Parole Chiave: verità, geometrie non euclidee, assioma, platonismo.

Abstract: *The article traces the process of mathematical thinking changes from the Platonic conception of absolute mathematical truth to the conception of pure mathematics: set of hypothetical-deductive systems, made up of propositions derived logically from a few initial propositions which "posits" the truth. In mathematics from the absolute truth it has become relative, with only syntactic consistency value with the axioms, without the need for a semantic value. In this change we have seen the abandonment of the mathematical Platonism in favor of mathematics as a free creation of our thinking. But is this true? Or maybe it is not a confirmation of the mathematical Platonism universalized in a Parmenidean?*

Keyword: truth, non-Euclidean geometry, axiom, Platonism.

Citazione: Nicotra L., *La verità in matematica: da assoluta a relativa*, «ArteScienza», Anno III, N. 6, pp. 71-146.

1 - Introduzione

Nell'immaginario collettivo è ancora molto diffusa l'idea che le affermazioni matematiche sono vere in assoluto, che la matema-

* Direttore responsabile di «ArteScienza», ingegnere e giornalista, Presidente dell'Associazione culturale "Arte e Scienza"; luca.nicotra1949@gmail.com.

tica non è un'opinione; da qui il popolare aforisma "due più due fa quattro e non si discute". Nel suo *Discorso contro gli abbreviatori*, contenuto nel primo dei *Quaderni di Anatomia,* Leonardo da Vinci stigmatizza magistralmente questa incondizionata fede nella verità assoluta della matematica:

> Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione, e mai porrà silenzio alle contraddizioni delle sofistiche scienzie, colle quali s'impara uno eterno gridore.

In effetti, fino all'inizio del secolo XIX, tutta la matematica appariva una solida costruzione "a una via", vale a dire si riteneva che tutte le sue branche, geometria, aritmetica, algebra, analisi, ecc., esprimessero un unico e necessario modo di conoscenza.

La geometria di Euclide,[1] nella quale si è identificata sostanzialmente la matematica dall'antichità fino agli albori dell'Era Moderna, traeva le sue idee fondamentali e i suoi postulati dal mondo fisico, non nel senso che diamo noi oggi a questa espressione bensì in senso platonico.

Platone aveva una triplice anima: del filosofo, del matematico e del poeta. Nei suoi scritti ricorreva a due forme letterarie particolarmente efficaci e suggestive, il dialogo e il mito, utilizzato, quest'ultimo, come racconto fantastico per illustrare in maniera più espressiva e poetica il suo pensiero. Per spiegare il processo della conoscenza, egli sviluppò il "mito dell'anima", secondo il quale la nostra anima

1 Euclide (330?-275? a. C.), di cui non si conosce il luogo di nascita (forse Naucrati in Egitto), ma che insegnò sicuramente nel famoso Museo di Alessandria d'Egitto, nei suoi *Elementi* intese raccogliere tutte le nozioni di geometria e aritmetica fino ad allora note, realizzandone una sistemazione razionale, cioè regolata dalle operazioni logiche del ragionamento deduttivo, fornendo in pari tempo quello che sarà considerato, a lungo, il primo vero trattato razionale di matematica elementare. In realtà, prima di Euclide, operarono altri trattatisti fra i matematici greci: Ippocrate di Chio, contemporaneo di Socrate, Democrito, Leone, contemporaneo di Platone, Tedio, contemporaneo di Aristotile. Ma l'opera di Euclide oscurò a tal punto quella dei suoi predecessori, da farne perdere successivamente ogni traccia, sicché i suoi *Elementi* rimasero il primo trattato a noi giunto e l'unico fino al secolo XVIII, allorquando innovazioni profonde nella trattatistica matematica furono apportate da Alexis Claude Clairaut, Adrien Marie Legendre e dai successivi trattatisti, fino a quelli dei nostri tempi. Malgrado ciò, gli *Elementi* di Euclide sono rimasti il testo di geometria elementare adottato nelle scuole di tutto il mondo, fino agli inizi del secolo XX.

Gli *Elementi* di Euclide

Gli *Elementi* erano composti da tredici libri o capitoli: i primi sei dedicati alla geometria piana, il 7°, 8° e 9° all'aritmetica, il 10° agli incommensurabili, e infine gli ultimi tre alla geometria solida. I libri tuttora più apprezzati sono il quinto, dedicato alla teoria dei rapporti, e il decimo, che tratta delle grandezze incommensurabili.

Secondo alcuni storici della matematica, Euclide non fu l'unico autore degli *Elementi*, bensì, ad Alessandria d'Egitto, sarebbe stato a capo di una scuola di matematici che contribuirono tutti alla stesura degli *Elementi* e scrissero, anche dopo la sua morte, altre opere utilizzando il nome del Maestro. Secondo altri, invece, ispirandosi all'esempio contemporaneo di Bourbakj, ritengono che Euclide non sia mai esistito, e che tutte le opere a lui attribuite furono scritte da un gruppo di matematici che le pubblicarono sotto il nome simbolico di Euclide, peraltro molto comune nell'antichità, in onore del filosofo Euclide di Megara, vissuto circa un secolo prima e spesso erroneamente confuso con l'Euclide alessandrino degli *Elementi*. Un'approfondita analisi delle ipotesi sull'esistenza di Euclide è riportata da J. Itard in *Les livres arithmétique d'Euclide*, Paris, 1962.

Gli *Elementi* di Euclide sono stati il libro più diffuso al mondo, dopo la *Bibbia* e le opere di Lenin. Le sue edizioni ammontano a migliaia. Fu copiato e ricopiato manualmente fin dai tempi dell'antichità, tradotto dagli arabi, e poi diffuso in tutta Europa nelle varie lingue nazionali nel secolo XVI. La prima edizione stampata uscì a Venezia nel 1482 per opera del Campano. In tutti questi passaggi sono stati introdotti errori, aggiunte e tagli, per cui si è resa necessaria un'analisi filologica del testo che ha portato alle cosiddette edizioni critiche. In Italia, citiamo quella monumentale in quattro volumi, curata da Federigo Enriques e dai suoi collaboratori, negli ani 1924-1935 e successivamente quella di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni (UTET, 1974).

sarebbe immortale e di origine divina (cosa che avevano già pensato gli Orfici e i Pitagorici) e sarebbe sottoposta a un succedersi di reincarnazioni, avvalorando una specie di principio di conservazione dello spirito, così come esiste quello della materia. Il corpo per essa è una prigione, dalla quale si libera, alla morte, per tornare a librarsi nell'Iper-uranio, il Mondo delle Idee, dove l'anima può contemplare

Fig. 1 - Euclide disegna figure su una tavoletta (particolare da *La scuola di Atene* di Raffaello Sanzio).

o intuire le idee, dalle quali noi traiamo i concetti. Quando l'anima si reincarna, dimentica le idee intuite nella sua esistenza extra-corporea, ma l'esperienza sensoriale riaccende in essa la scintilla del ricordo. Conoscere, per Platone, è nient'altro che ricordare ciò che già è interamente nell'Iper-uranio. Dunque, per Platone, tutto si "scopre" e nulla si "inventa".

Anche i concetti matematici quindi, per Platone, sono derivati dal Mondo delle Idee e soltanto in apparenza dall'esperienza sensoriale, che ha semplicemente il compito di ravvivare in noi il loro ricordo. Questo punto di vista afferma in sostanza che le verità matematiche sono fuori di noi e, contrariamente a quello che può sembrare, sono indipendenti dall'esperienza fisica, perché questa è soltanto un "messaggero" del Mondo delle Idee, dal quale esse sono in realtà "prelevate". Dunque le verità matematiche sono necessarie e non sono una libera creazione del nostro pensiero.

Il platonismo ha influenzato molto il pensiero dei matematici di ogni tempo: la geometria non poteva essere che una sola, quella euclidea, già tutta contenuta nell'Iper-uranio platonico e dall'uomo quindi soltanto faticosamente svelata ma non inventata. Lo stesso atteggiamento valeva per l'aritmetica, per l'algebra, per l'analisi e per tutte le altre branche della matematica. Il compito del matematico è identico a quello dell'investigatore: scoprire la verità, non inventarla!

In una lettera al matematico olandese Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), il matematico francese Charles Hermite (1822-1901) scriveva:

> Io credo che i numeri e le funzioni dell'Analisi non siano un prodotto arbitrario del nostro spirito; penso che essi esistano fuori di noi, con lo stesso carattere di necessità delle cose della realtà oggettiva e che noi le incontriamo o scopriamo e le studiamo come i fisici, i chimici, e gli zoologi.

A conclusioni sostanzialmente coincidenti era già arrivato il grande filosofo tedesco Immanuel Kant (1724-1804) nella sua opera *Critica della ragion pura*, nella quale distingueva i giudizi dell'uomo in "a priori" e "a posteriori" , in "sintetici" e "analitici".

Fig. 2 - Immanuel Kant (1724-1804).

I giudizi "a priori" sono indipendenti dall'esperienza, necessari e universali, perché fanno parte del nostro stesso pensiero, al contrario di quelli "a posteriori "(o empirici), che sono ricavati dall'osservazione della realtà fisica.

I giudizi "analitici" sono quelli in cui il concetto che esprimono è già contenuto nel soggetto di cui si parla. Sono utili soltanto perché esplicitano e rendono intelligibile ciò che nel soggetto è contenuto cripticamente in forma implicita. Pertanto, i giudizi analitici non aggiungono sostanzialmente nuova conoscenza.[2]

I giudizi "sintetici", invece, esprimono concetti non già contenuti nel soggetto di cui si parla e quindi apportano nuova conoscenza.[3]

I concetti matematici, per Kant, sono giudizi sintetici a priori, che esprimono verità necessarie e universali aggiungendo nuova conoscenza. Per Kant lo spazio era «una rappresentazione a priori necessaria, che è alla base di tutte le intuizioni esterne» e la geometria la «scienza che determina le proprietà dello spazio sinteticamene

---

2 «... per mezzo di giudizi analitici la nostra conoscenza non può estendersi punto, ma può invece essermi reso esplicito e intelligibile il concetto che già posseggo». (Immanuel Kant, *Critica della ragion pura*).

3 «...nei giudizi sintetici io ho bisogno, oltre che del concetto del soggetto, di qualcos'altro ancora, su cui si appoggi l'intelletto per riconoscere che gli appartiene un predicato non compreso nel concetto». (Immanuel Kant, *Critica della ragion pura*).

Fig. 3 - Benjamin Peirce (1809-1880).

e quindi a priori». E se lo spazio è «una rappresentazione a priori necessaria», esso non può che essere unico e quindi unica è la geometria che ne determina le proprietà «sinteticamene e quindi a priori». La geometria euclidea era dunque, per Kant, l'unica e necessaria conoscenza dello spazio.

Ma nella prima metà del secolo XIX, secolo d'oro della matematica, questa incrollabile fede, universalmente condivisa, subì un improvviso e inaspettato attacco su più fronti: quattro matematici, Nicolaj Ivanovic Lobacevskij, Janos Bolyai, Karl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann riuscirono a sviluppare geometrie diverse da quella euclidea, di cui più tardi Eugenio Beltrami e Felix Klein dimostrarono la validità logica. Inoltre Benjamin Peirce (1809-1880) gettò le basi per la costruzione di ben 162 algebre diverse e altrettanto valide! Altre geometrie, poi, si accesero nel firmamento matematico: le geometrie non archimedee, nelle quali non è accettato il postulato del continuo o postulato di Archimede-Eudosso.[4] Questo postulato divise la matematica in due: la matematica cantoriana, cosiddetta in onore del grande matematico tedesco Georg Cantor, in cui esso è accettato e quella non cantoriana in cui, invece, è ignorato.

L'apparizione di geometrie diverse da quella euclidea, ma altrettanto valide logicamente, ha condotto l'uomo non soltanto a varcare le colonne d'Ercole dell'antica geometria greca, concependo nuove forme di conoscenza geometrica, ma anche, e soprattutto, a mutare il suo concetto di verità matematica, con conseguenze filosofiche di grandissima portata nel pensiero scientifico contemporaneo. Lo storico della matematica Pietro Nastasi così commenta l'avvento delle geometrie non euclidee:

4 Esso afferma che date due grandezze disuguali, che stiano fra loro in un rapporto finito e quindi entrambe diverse da zero, esiste sempre un multiplo della minore che supera la maggiore.

> ... la nascita della geometria non euclidea che, attraverso un lungo peregrinare storico, ha raggiunto all'inizio del XIX secolo il passaggio dal non essere all'essere. I suoi oggetti, dotati di nomi banali - innocenti e al di sopra di ogni sospetto - come triangolo, quadrato, cerchio, sono figure insolite, tacciate di appartenere ad un mondo mostruoso, come generati da un incubo passeggero dell'*esprit de géométrie*.[5]

Fig. 4 - James Frederick Ferrier (1808-1864).

Qualunque siano le critiche al valore epistemico delle geometrie non euclidee, è innegabile che esse siano state determinanti nell'ampliare il concetto dello spazio euclideo, ancorato alla realtà fisica, in un più ampio concetto astratto di spazio matematico e nell'attrarre l'attenzione dei matematici su una più profonda e critica analisi della base assiomatica e del suo significato per la matematica e più in generale per la scienza tutta, facendo fiorire quel complesso di indagini attorno alla struttura logica e alla metodologia delle scienze che, con il termine coniato dal filosofo scozzese James Frederick Ferrier (1808-1864),[6] hanno dato corpo a una nuova disciplina: l'epistemologia, intesa originariamente come quella parte della gnoseologia che studia i fondamenti, la validità, i limiti della conoscenza scientifica.

Dal secolo scorso, i matematici hanno capito che, almeno teoricamente, è possibile costruire molte "matematiche", ciascuna delle quali si configura come un sistema ipotetico-deduttivo, vale a dire come un insieme di proposizioni indimostrate, che esprimono proprietà di un numero limitato di enti indefiniti aventi il ruolo di semplici ipotesi, la cui verità non è riconosciuta ma soltanto postulata e da cui sono dedotte, per via logica, tutte le altre proposizioni del sistema: i teoremi.

5 Pietro Nastasi, Recensione del libro di Imre Toth *NO! Libertà e verità, creazione e negazione, in* «Matematica Pristem», Milano, Springer-Verlag, 1999.

6 Nella sua opera *Epistemology or Theory of Knowing.*

I "nei" degli *Elementi* di Euclide

Paradossalmente quello che era considerato l'unico neo nell'opera del grande matematico di Alessandria d'Egitto, il quinto postulato, si è rivelato, invece, non solo corretto ma un chiaro segno della grandezza di Euclide. La critica moderna, infatti, riconosce a Euclide la geniale capacità di aver intuito, malgrado la mancanza di evidenza fisica, l'indimostrabilità del quinto postulato e quindi il suo carattere di postulato, contrariamente a quello che è successo, nei secoli succesivi, a molti grandi matematici che si sono ostinati invano di dimostrarlo. Altri nei, invece, sono stati trovati negli *Elementi* euclidei agli inizi del secolo XX, quando l'opera critica delle scuole formalista e logicista dei matematici inglesi, tedeschi, francesi e italiani portò alla definitiva confutazione del valore logico dell'opera euclidea, con la sua conseguente messa al bando. Fra le tante critiche alla struttura logica degli *Elementi*, basti ricordare il severo giudizio di Eric Temple Bell: «Se ne valesse la pena, si potrebbe sottoporre l'intera struttura logica della geometria degli *Elementi* a un'analisi, che si concluderebbe con un elenco di dimostrazioni difettose e di premesse occulte, cioè con una condanna senza appello». Le premesse occulte cui allude Bell sono alcuni postulati di cui Euclide si servì nelle dimostrazioni, senza peraltro averli esplicitamente menzionati. Il logico e matematico Bertrand Russell, invece, ritenne che valesse la pena analizzare, dal punto di vista logico, le prime ventisei proposizioni del 1° libro degli *Elementi,* con lo sgradevole risultato di porre in luce «i non pochi errori presenti» in esse (B. Russell, *I principi della matematica*, cap. 47°). Ma col senno di poi, (e di un "poi" di quasi duemila anni!) è facile ragionare correttamente.

Tali critiche, pur giuste che siano, non oscurano l'importanza dell'opera di Euclide bensì ne ridimensionano, storicamente, il valore scientifico. Va detto che ancor oggi escono indenni dall'arroganza dei matematici-logici, destando particolare ammirazione, i libri quinto e decimo degli *Elementi* euclidei, dedicati rispettivamente alla teoria dei rapporti e agli incommensurabili.

Nelle pagine che seguono ripercorreremo le vicende principali che hanno condotto a questo radicale mutamento del pensiero matematico, con l'abbandono del concetto kantiano delle verità matematiche "necessarie e universali" e la conseguente rinuncia a "una verità matematica” per entrare nel più vasto regno delle “infinite possibili verità matematiche” degli infiniti possibili sistemi ipotetico-deduttivi. La matematica, pur rimanendo una scienza rigorosa, ha abdicato all’assolutismo della verità, in favore di verità “razionali rispetto allo scopo” e non “rispetto al valore”, come puntualizza Max Weber. La verità in matematica diventa soltanto consistenza dei costrutti matematici, cui si giunge percorrendo una dimostrazione secondo determinate e accettate regole logiche, a partire da un fondamento assiomatico coerente ma non necessariamente intuitivo. Nel caso in cui gli assiomi non abbiano una corrispondenza con la realtà fisica anche i teoremi, che ne discendono, saranno proposizioni con significato probabilmente non corrispondente a uno stato di cose oggettivo.

Il punto di partenza di tutto questo iter è stato la scoperta (o invenzione?) delle geometrie non euclidee, nate dalla negazione del 5° postulato degli *Elementi* di Euclide.

2 - Struttura logica della geometria. Definire e dimostrare

La geometria, come ogni altra branca della matematica, viene costruita con due operazioni fondamentali del pensiero: le definizioni e le dimostrazioni.

Poiché non si può dimostrare qualcosa senza prima aver definito gli oggetti di cui si parla, cominciamo col capire cosa significa “definire”.

Se riflettiamo sul significato di questa parola, concorderemo tutti che definire una cosa significa, in parole povere, descrivere quella cosa per mezzo di altre più semplici di cui essa può pensarsi costituita. Per il momento accontentiamoci di usare la parola “cosa”, che nella lingua italiana ha un significato molto vago e generico. Definire una cosa è quindi scomporla in altre a noi già note, con lo scopo di ricondurne la conoscenza a queste. Ma le cose, in cui abbiamo scomposta la cosa da definire, sono a noi note perché ciascuna di esse, a sua volta, è stata già scomposta in altre cose, dovremmo dire ancora una volta, già note. Definire è, dunque, un procedimento iterativo che assomiglia a una reazione a catena che procede a “passo di gambero", ovvero camminando all'indietro. È evidente, infatti, che questo mettere in relazione una cosa con un'altra, in cui consiste il definire, o se volete, in termini più espressivi, questo giocare a "scarica barile", non può prolungarsi indefinitamente, bensì deve esaurirsi e terminare con una cosa che sta all'inizio e che sia "considerata nota" senza doverla mettere in relazione con altre: essa è, dunque, per sua stessa natura "primitiva" e "indefinita". Per tale motivo gli "oggetti" posti all'inizio della catena di definizioni, per l'ufficio da loro svolto, sono detti "indefiniti"o "primitivi".

Prima che avvenisse la scoperta delle grandeze incommensurabili[7] da parte della Scuola pitagorica, avvenuta probabilmente intorno al 410 a. C., la geometria era costituita da enti materiali o sensibili. Infatti, la geometria, allora, concepiva il punto come un corpuscolo materiale di ridottissime dimensioni, ma pur sempre finite: la "monade pitagorica". Di conseguenza, le rette, i piani e tutte le altre figure geometriche, essendo costituite di punti, erano anch'esse materializzate nelle monadi costituenti. Il punto era, in tale geometria degli "enti sensibili", ciò che l'atomo era nella concezione della materia: il costituente più piccolo e indivisibile. La concezione degli enti geometrici era, dunque, atomistica o granulare o, in linguaggio più moderno, "quantistica", essendo il "quanto" costituito dal punto-monade pitagorica.

In tal caso, sarebbe facile far conoscere a tutti il principio della catena di collegamenti in cui consiste il definire: basterebbe mostrare l'oggetto materiale da noi individuato come "principio" (la monade pitagorica) e pronunciarne il nome (punto); in tal modo, d'ora in avanti, sarebbe sufficiente citare questo nome per evocarne l'imma-

7 Due grandezze A e B si dicono commensurabili se ammettono un sottomultiplo comune, vale a dire una grandezza che sia contenuta un numero intero di volte sia in A sia in B e che quindi possa essere utilizzata come unità di misura sia per A sia per B. Si tenga presente che, in particolare, il sottomultiplo comune può essere una delle due grandezze, in quanto ciascuna grandezza è sottomultipla di se stessa secondo l'unità. Il rapporto fra due grandezze commensurabili è sempre un numero "razionale", intero o frazionario, che prende questo nome proprio per il fatto che può esprimere il "rapporto" (in latino *ratio*) fra due grandezze. Due grandezze A e B si dicono, invece, incommensurabili se non ammettono nessun sottomultiplo comune, vale a dire se non esiste una grandezza che possa essere utilizzata come unità di misura sia per A sia per B; il rapporto fra due grandezze incommensurabili non è quindi un numero razionale (intero o frazionario).ma un numero "irrazionale".

gine.[8] In altre parole, la conoscenza dell'oggetto-principio è fissata direttamente tramite i sensi.

Le cose si complicarono enormemente allorché la scoperta dele grandezze incommensurabili[9] fece cadere il "castello" della geometria degli enti sensibili. Infatti, se le rette avessero una struttura "granulare" non potrebbero esistere grandezze incommensurabili: male che vada esisterebbe sempre il "punto" come sottomultiplo comune.

La scoperta degli incommensurabili portò necessariamente ad abbandonare la geometria costituita da punti materializzati con una dimensione finita, se pur piccolissima (le monadi pitagoriche), per abbracciare l'idea del punto senza alcuna dimensione, un ente del tutto ideale privo di ogni fisicità. Il punto, la retta, il piano e tutte le altre figure geometriche divennero entità immateriali e astratte, essendo la loro idea "astratta" da oggetti del mondo fisico.

Dalla geometria approssimata degli enti sensibili si passò, dunque, alla geometria esatta delle idee.

Ma cos'è allora questo nuovo punto? Non si può più rispondere a questa domanda "mostrandolo", perché non ha alcuna esistenza reale e quindi come fare per definirlo? Euclide solo apparentemente lo definisce come «ciò che non ha parti» (1a Def.). È ovvio che questa non è una vera definizione (in realtà non definisce nulla) e non può

---

8 In tal caso la sua definizione verrebbe ricondotta a una percezione sensoriale e quindi, a rigore, non il punto sarebbe il principio bensì la sua percezione.

9 Uno dei problemi che potrebbero aver condotto alla scoperta delle grandezze incommensurabili è la duplicazione del quadrato, consistente nel trovare il lato del quadrato di area doppia di quella di uno dato. Platone, nel suo dialogo *Menone*, tratta questo problema, identico a quello di applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele, che può essere considerato metà di un quadrato. Secondo tale ipotesi, avvalorata anche da Aristotele, la prima coppia di grandezze incommensurabili sarebbe costituita dal diametro e il lato di un quadrato ovvero l'ipotenusa e il cateto di un triangolo rettangolo isoscele. Il loro rapporto è il numero irrazionale $\sqrt{2}$. Tuttavia non si hanno fonti storiche certe che consentano di individuare con esattezza né il periodo né il particolare problema che portò alla scoperta delle grandezze incommensurabili. Secondo gli orientamenti più attuali degli storici della matematica (Carl B. Boyer, *Storia della Matematica, Milano,* Mondadori, 1990, pp. 85-88), la prima coppia di grandezze incommensurabili fu probabilmente la diagonale e il lato di un pentagono regolare, scoperta ad opera di Ippaso o Ipparco di Metaponto, vissuto nell'Italia Meridionale intorno al 400 a.C., e la dimostrazione non implicava l'applicazione del teorema di Pitagora, ma un procedimento "*ad infinitum*". Se così fosse, il primo numero irrazionale scoperto sarebbe stato $\sqrt{5}$ e non $\sqrt{2}$.

nemmeno esserla, perché se lo fosse il punto non sarebbe un ente primitivo ma ci sarebbe qualcos'altro prima di lui nella catena di definizioni cui sarebbe riferito. Si tratta soltanto di una pseudo-definizione che vuole mettere in evidenza la caratteristica fondamentale e nuova del punto: l'assenza di dimensioni proprie, di estensione. Stessa osservazione vale per le "definizioni" euclidee della retta: «Una linea è lunghezza senza larghezza» (2a Def.) e della superficie: «Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza» (5a Def.) di cui il piano è un caso particolare: «Una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette» (7a Def.). Sono tutte pseudo-definizioni.

Vediamo ora cosa significa "dimostrare".

Le proprietà delle figure geometriche sono organizzate con una struttura logica identica a quella delle definizioni. Esse sono espresse da proposizioni del tipo "se è vero *p (ipotesi)*, allora è vero *q (tesi)*", essendo *p* e *q* due proposizioni. La verità di *q* è dimostrata mostrando che essa è una conseguenza logica della verità di *p*, in virtù di altre proposizioni già dimostrate, la cui verità, a sua volta, è stata dimostrata deducendola da altre proposizioni già dimostrate, e così via. Si presenta, pertanto, la stessa situazione del procedere a "passo di gambero" che abbiamo incontrata a proposito delle definizioni, vale a dire ci troviamo di

Fig. 5 - La prima pagina della prima edizione stampata degli *Elementi* di Euclide, uscita nel 1482 a Venezia.

fronte a un processo iterativo di derivazione logica di ogni proposizione da proposizioni che sono antecedenti nell'ordine logico deduttivo secondo cui tutte le proposizioni della nostra geometria sono strutturate. È ovvio, allora, che anche per le proprietà delle figure, come per le definizioni degli enti geometrici, il processo deduttivo deve avere un principio, costituito da proprietà la cui verità non può essere ulteriormente derivata da quella di precedenti proprietà, almeno ricorrendo agli strumenti della matematica. Tali proprietà, che stanno all'inizio del processo deduttivo che genera tutte le altre proprietà delle figure geometriche, sono dunque "indimostrate", così come gli enti primitivi, che stanno all'inizio del processo deduttivo che genera tutte le altre definizioni delle figure geometriche, sono "indefiniti". È importante e notevole osservare che esse esprimono relazioni fra gli enti primitivi e, per la funzione svolta, sono anche denominate proposizioni primitive o fondamentali, usualmente note come postulati o assiomi.[10]

3 - Il 5° postulato di Euclide è veramente un postulato?

Dal III secolo a. C. fino ai primi decenni del XIX secolo, quindi per circa due millenni, l'unica e indiscussa forma di conoscenza geometrica concepita dall'uomo è stata quella codificata dal grande matematico greco Euclide nei suoi *Elementi*.[11]

10 Oggi i termini assioma e postulato sono considerati sinonimi. In tempi passati, invece, pur denotando entrambi le proposizioni primitive, erano utilizzati con una differenza di carattere "psicologico": assioma era la proposizione primitiva di per sé evidente, mentre postulato era quella non evidente e che, pertanto, si "postulava", vale a dire si chiedeva al lettore di accettare per vera, nonostante la sua mancanza di evidenza. È ovvio che questa distinzione era accettabile quando si riteneva che le proposizioni primitive potessero essere tratte soltanto dal mondo sensoriale e quindi fossero soggette unicamente al vaglio dell'intuizione. Oggi, invece, tale distinzione non ha più senso, giacché le proposizioni primitive possono avere origine anche dalla logica o dal libero arbitrio e non avere quindi nessun attributo di evidenza intuitiva e di corrispondenza alla realtà fisica.

11 Nel web si possono trovare diverse edizioni digitalizzate di antichi testi degli *Elementi*: *Euclid's Elements of Geometry, J.L. Heiberg* (1883–1885) con testo greco e inglese a fronte, a cura di Richard Fitzpatrick (Translator), in http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf; *Euclide restituto da Vitale Giordano da Bitonto lettore delle matematiche, Roma, Amgelo Bernabò, 1686,* in http://mathematica.sns.it/media/volumi/102/Euclide%20

L'opera euclidea, erroneamente, è stata ritenuta per millenni un esempio insuperabile di rigore logico, tranne, secondo il giudizio che ne diede nel 1621 sir Henry Savile, in due punti: la teoria delle parallele e la teoria dei rapporti. Oggi tale giudizio è totalmente ribaltato, riconoscendo invece in tali teorie un rigore che non offre il fianco a critiche. Le numerose imperfezioni logiche, unite alla difficoltà e prolissità degli *Elementi,* hanno fatto assumere una posizione molto severa da parte di Bertrand Russell (1872-1970) nei confronti dell'uso degli *Elementi* euclidei nelle scuole inglesi di inizio Novecento:

> In queste circostanze, è veramente uno scandalo che venga tuttora insegnato ai bambini in Inghilterra. Un libro dovrebbe essere o comprensibile o esatto; unire le due cose è impossibile, ma mancare di entrambe significa non meritare un posto come quello che Euclide occupa nell'educazione.[12]

Ma in una nota successiva del 1917 Russell aggiungeva:

> Da quando tutto ciò è stato scritto, Euclide ha cessato d'essere adoperato come libro di testo. Ma temo che molti dei libri usati adesso siano talmente cattivi, che il mutamento non ha costituito un gran progresso.[13]

Le proposizioni primitive poste da Euclide a fondamento della geometria variano leggermente, in numero e contenuto, nelle varie versioni degli *Elementi*. Generalmente si fa riferimento all'elenco di dieci proposizioni primitive dato da Thomas L. Heath, considerato il maggior studioso moderno di Euclide. Esse sono distinte in assiomi generali (detti nozioni comuni o semplicemente assiomi) e in assiomi speciali (o postulati).[14]

---

restituto,%20Elementi%201-8_bw.pdf; *Euclide megarense philosopho, solo introduttore delle scientie matematiche*, trad. di Niccolò Tartaglia, Venezia, Troiano, 1565, in http://elearning.unimib.it/pluginfile.php/98592/mod_resource/content/1/euclid_p.pdf

12 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, in *Misticismo e logica*, Bologna, Longanesi, 1970, p.90.

13 Ivi.

14 Nelle trattazioni moderne della geometria euclidea vengono aggiunti postulati sottaciuti da Euclide ma di fatto da lui utilizzati. Normalmente si fa riferimento all'imposta-

Gli assiomi generali hanno un'evidenza universale, essendo validi per tutte le branche della matematica e sono:

1. *La parte è minore del tutto.*
2. *Due cose uguali ad una terza sono uguali fra loro.*
3. *Aggiungendo a due cose uguali altre due cose uguali si ottengono cose uguali.*
4. *Sottraendo da due cose uguali altre due cose uguali si ottengono cose uguali.*
5. *Due cose che coincidono sono uguali.*

Gli assiomi speciali o postulati, invece, sono validi soltanto per la geometria. Essi presentano una minor evidenza rispetto agli assiomi, e ciò giustifica il loro nome, che indica trattarsi di "verità postulate", cioè verità che si "chiede" al lettore di accettare:

1. *Da ogni punto del piano ad ogni altro punto è possibile condurre una linea retta.* [Euclide ha sottaciuto "una sola"].
2. *Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta.*
3. *Attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere è possibile tracciare una circonferenza.* [Quindi il piano è illimitato]
4. *Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro.*
5. *Ogni volta che una retta t, intersecando altre due rette r e s, forma con esse angoli interni da una medesima parte* (angoli coniugati interni di figura 6) *la cui somma è minore di due retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli anzidetti formano insieme meno di due retti.*

Quest'ultimo postulato, detto anche postulato delle parallele

zione assiomatica contenuta nei *Fondamenti della geometria* di David Hilbert. I postulati della geometria euclidea sono oggi distinti in postulati dell'appartenenza, dell'ordine, del movimento e postulato delle parallele. Cfr. Mario Villa, *L'indipendenza del postulato V di Euclide*, in AA. VV. *Per un insegnamento moderno della matematica*, edito sotto il patrocinio del Ministero Pubblica Istruzione e dell'O.C.S.E. per le classi pilota in matematica - Bologna, Patron, 1963, pp. 338-339.

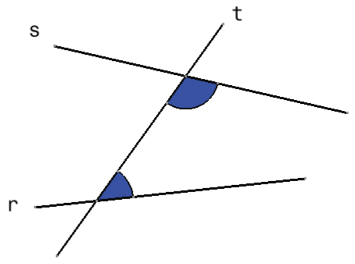


Fig. 6 - 5° postulato di Euclide.

- per una ragione che sarà chiara più avanti - differisce notevolmente dai precedenti, sia per una maggiore complessità sia per una scarsa evidenza fisica. Esso è divenuto famoso nella storia della matematica, e più in generale del pensiero filosofico-scientifico, per essere stato l'origine delle prime ipotesi non euclidee e, di conseguenza, di quel profondo mutamento nella concezione della matematica che ne è scaturito.

Gli psicologi affermano che la difficoltà d'intuizione di questo postulato è imputabile, fra l'altro, alla maggiore complessità della sua elaborazione attraverso i sensi, che in questo caso sarebbero due: il tatto e la vista. Inoltre, dice Luigi Campedelli, esso richiede «una più matura educazione ai concetti matematici (perché implica l'estendersi della retta all'infinito). Si aggiunga l'impossibilità di una verifica sperimentale (sempre a causa di quell'illimitata lunghezza della retta) sia pure nella grossolana approssimazione che è consentita dai modelli materiali degli enti geometrici astratti».[15]

Quest'ultima obiezione, tuttavia, è piuttosto discutibile, in quanto la retta della geometria è un ente ideale, un'astrazione che non deve avere, per esistere nel mondo delle idee di una geometria "esatta", una validazione sperimentale. L'idea del "non incontrarsi mai" di due rette parallele è un fatto ideale indipendente da qualunque verifica, ha una sua esistenza autonoma da qualunque inerenza alla realtà fisica. Non c'è nulla da verificare: è un assunto della mente.

Sembra, infatti, che Aristotele considerasse il 5° postulato di Euclide una libera scelta e non una necessità! Il grande storico e filosofo della matematica Imre Toth (1921-2010), già nel 1969, nel suo articolo *Dass Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum* (*Il problema delle parallele nel Corpus Aristotelico*)[16] indicava in Aristotele il riferimento

15 Luigi Campedelli, *La struttura logica della geometria*, in AA. VV. *Per un insegnamento moderno della matematica*, Op. cit., p. 267.

16 In «Archive for the History of Exact Sciences», 3 (1967), pp. 249–422.

Fig. 7 - Imre Toth, ***Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non euclidei nel "Corpus Aristotelicum"*** **(1997).**

alla geometria non euclidea come alternativa ugualmente valida alla geometria euclidea. A tale articolo ha fatto seguito, nel 1977, un altro suo saggio, *Geometria more ethico. Die Alternatìve: euklidische oder nichteuklidische Geometrie in Aristotele; und die Grundlegung der euklidische Geometrie,*[17] dove Toth riporta in dettaglio i passi del *Corpus Aritotelicum* contenenti chiari riferimenti alla possibilità di geometrie non euclidee.[18] Toth sostiene che la matematica è scienza della libertà e che la geometria non euclidea è nata per la libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva. Più recentemente, su invito di Giovanni Reale, Imre Toth ha documentato queste sue ricerche in un libro pubblicato in Italia, dal titolo *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel "Corpus Aristotelicum"* (Milano, Vita e Pensiero, 1997). Nella recensione del libro, così si esprime Antonino Contiliano:[19]

---

17 In AA. VV., *Prismata, Festschrift für Willy Hartner*, a cura di S. Maeyama e M. Schramro, Wiesbaden, 1977, pp. 395-415.

18 *Analitici primi*, Il 16, 6S a 4-7; U 17, 66 a 11-15; *Analitici secondi*, l 12, 77 b 16-28; l 24, 85 b 38-86 a 3; Il 2, 90 a 12-14; U 2, 90 a 31-34; U 8, 93 a 32-35; *Confutazioni sofistiche*, 11. 171 a 12-16: *Fisica*, Il 9, 200 a 15-30: *Il Cielo*, l 12, 281 b 3-6; *L'anima*, l 1, 402 b 16-22; *Problemi*, 956 a 15-27: *Metafisica*, E 2, 1026 b 10-14; 10, 1052 a 4-7: *Etica Nicomachea*, VI5, 1140 b 11-20; *Grande Etica*, 19, 1187 a 29-10. 1187 b 20; *Etica Eudemia*, II 6. 1222 b 15-42.

19 http://www.vicoacitillo.it/recen/archivio/80.pdf.

> Eravamo abituati a pensare che la nascita, il dibattito e l'assiomatizzazione delle geometrie non-euclidee e dell'aritmetica fossero soprattutto prodotti del XIX e XX secolo. Imre Toth, però, dietro un'accurata rilettura e interpretazione del corpus delle opere aristoteliche e delle opere dello stesso Platone, testimonia che il pensiero greco aveva già posto e discusso, in un appassionato dibattito, il problema dell'assiomatizzazione (euclidea o non-euclidea) della geometria e dell'aritmetica (pitagorica o non-pitagorica, eudossiana) come epistemologia filosofica della razionalità scientifico-matematica; e che il dibattito sull'assiomatizzazione della razionalità geometrica (in questo intervento è il solo che tocchiamo, rimandando il lettore, per il "pitagorico" e il "non-pitagorico", direttamente all'excursus di Toth) – come indicato nelle stesse opere di Platone e di Aristotele – avviene attraverso una scelta singolare e originale: quella etica o del soggetto libero che, senza costrizione alcuna, sceglie e decide tra l'*arché* geometrica euclidea e/o non-euclidea. L'alternativa è – come conseguenza dell'unicità o meno della verità del postulato V delle parallele di Euclide – tra la somma degli angoli di un triangolo uguale a due retti o non uguale a due retti, per cui nello "spazio etico di Aristotele, si può dire che la geometria risulta una geometria *more ethico constructa* " (p. 137), in quanto essa richiede un atto di "deliberazione" tra due opposti egualmente evidenti, razionali e indecisi. Ciò che accomuna (anticipando l'inverso di Spinoza dell'Etica come *ordine geometrico demostranda*) il sapere e la *praxis* dell'etico e del geometrico, per Aristotele, dunque, è la libertà di scegliere tra due ipotesi egualmente razionali e prive di contraddizioni. Nell'alternativa, teoreticamente indecidibile, l'opposizione "euclideo-non euclideo", infatti, non costituisce né un necessario (l'euclideo), né un impossibile (il non-euclideo).

Tuttavia, nel contesto di una geometria, come quella euclidea, ispirata all'esperienza fisica e quindi di stampo intuizionista, la mancanza di evidenza fisica giustifica il sospetto che il 5° postulato possa essere in realtà un teorema, vale a dire una proposizione derivabile dagli altri postulati.

Oltre la scarsa evidenza fisica, ci sono altre ragioni "logiche" che hanno indotto i matematici, fin dall'antichità, a dubitare che il 5° postulato fosse in realtà un teorema.

Infatti, la sua proposizione inversa (cioè quella che si ottiene scambiando fra loro l'ipotesi e la tesi) è dimostrabile facendo uso dei primi quattro postulati ovvero, come dicono i matematici, nell'ambito della cosiddetta "geometria assoluta o neutrale": *Se due rette r, s che si incontrano sono intersecate da una terza retta t, allora questa forma, con le due semirette delle due rette r, s che contengono il punto di intersezione, angoli interni da una medesima parte la cui somma è minore di due retti*.[20]

Fig. 8 - Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Poiché, generalmente, i teoremi euclidei sono dimostrabili assieme al loro inverso, appaiono giustificati i tentativi di dimostrare il 5° postulato. Inoltre, lo stesso Euclide lo introduce il più tardi possibile, come proposizione numero 29 del 1° libro degli *Elementi*, dopo aver tratto tutte le possibili conseguenze dai primi quattro postulati. Questa evidente riluttanza di Euclide a servirsi del quinto postulato ha fatto pensare che egli stesso ne avesse cercato invano la dimostrazione e che, alla fine, intuita la sua indimostrabilità, e volendo d'altra parte servirsene per la dimostrazione di successive proposizioni, si fosse rassegnato a collocarlo ultimo fra i postulati.

Fig. 9 - John Wallis (1616-1703).

I posteri furono meno saggi di Euclide, e per duemila anni si sono affannati invano nella ricerca della sua dimostrazione. La lista dei matematici impegnati in quest'ardua impresa è lunga e comincia dall'antichità: Posidonio, Gemino, il grande astronomo Tolomeo, il neoplatonico Proclo, molti matematici mussulmani dal secolo IX al secolo XIII, fra i quali Alhazen, Omar

20 Per chi volesse seguire la dimostrazione si rimanda al volume di Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico,* Torino, Boringhieri, 1960, pp. 30-31.

Khayyam e Nasir al-Din al-Tusi,[21] i più ingegnosi geometri italiani del Rinascimento e del secolo XVII, il matematico inglese John Wallis (1616-1703), predecessore di Newton, il francese Adriene Marie Legendre (1752-1833), l'ungherese Wolfgang Farkas Bolyai (1775-1856). Quest'ultimo era talmente provato dalle sue inutili fatiche, che quando seppe che il figlio Janos (1802-1860), ufficiale dell'esercito e brillante matematico "dilettante", si stava dedicando allo stesso problema, cercò in tutti i modi di dissuaderlo:

> Per amor del cielo, t'imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tempo e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità.

Evidentemente Farkas Bolyai non conservava un buon ricordo dei suoi infruttuosi tentativi! Per nostra fortuna, il figlio era più testardo e fortunato del padre e si dedicò invece con caparbia all'irrisolto problema delle parallele. Egli, come tutti gli altri, non riuscì a dimostrare il postulato delle parallele, tuttavia pervenne, indipendentemente, a risultati analoghi a quelli raggiunti dal matematico russo Nikolaj Ivanovic Lobacevskj, scoprendo la geometria non euclidea iperbolica, detta pertanto di Lobacevskj-Bolyaj in onore di entrambi i matematici.

L'accanimento con cui i matematici si dedicarono al problema della dimostrazione del 5° postulato, sempre in maniera fallimentare, raggiunse l'apice nel secolo XVIII, tanto che nel 1759 Jean le Rond d'Alembert lo definì «*le scandale des éléments de géométrie*». Quasi tutti i matematici che si occuparono del problema delle parallele lo fecero soltanto per sanare quel neo dell'opera euclidea costituito dal dubbio sulla vera natura del 5° postulato e non perché dubitassero della sua verità.

Fecero eccezione i quattro matematici fondatori ufficiali delle geometrie non euclidee, che invece misero in dubbio la verità del 5° postulato: Nicolaj Ivanovic Lobacevskij, Janos Bolyai, Karl Friedrich

21 Cfr. Luca Nicotra, *Il ruolo dell'Islàm nello svilupo delle scienze*, pp. 85-86, in «ArteScienza» n. 4 , 2015.

Gauss e Bernhard Riemann.

Il tentativo più illustre di dimostrare il 5° postulato, dal quale involontariamente apparve per la prima volta la possibilità di geometrie non euclidee fondate sulla sua negazione, fu quello del padre gesuita Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733). Il gesuita italiano espresse la sua presunta dimostrazione in un'opera intitolata *Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclide emendato da ogni difetto)*, data alle stampe nel 1733, anno della morte dell'autore, ma non pubblicata, rimanendo così pressocché nell'oblio per circa un secolo e mezzo, fin quando nel 1889 una sua copia fu ritrovata dal padre gesuita Angelo Manganotti, il quale la fece leggere a un grande matematico del tempo, Eugenio Beltrami (1835-1900).[22] Questi, riconosciuto il valore dell'opera, che anticipava di ben novantasei anni l'apparizione ufficiale della geometria non euclidea di Lobacevskj (1829), rese il dovuto riparo all'oblio più che secolare, pubblicizzando brillantemente negli ambienti scientifici internazionali l'opera ritrovata.

Fig. 10 - Eugenio Beltrami (1835-1900).

Anche il matematico svizzero Johann Heinrich Lambert (1728-1777), scienziato di molteplici interessi, ben noto per la sua somma superbia,[23] ricollegandosi a Saccheri, tentò invano di dimostrare il postulato delle parallele, ma egli stesso ammise e riconobbe lucidamente la causa del suo fallimento:

> È possibile sviluppare dimostrazioni del postulato di Euclide fino a un punto tale che il resto sembra una cosa da nulla. Ma un'analisi accurata mostra che in questa cosa apparentemente da nulla sta tutta

22 È una strana coincidenza che la riscoperta dell'*Euclides* di Saccheri nel 1889 coincide emblematicamente con l'innalzamento di una statua commemorativa di Giordano Bruno a Roma, in Campo dei fiori, nel luogo ove fu arso vivo il grande filosofo: due episodi vissuti con molta partecipazione da parte degli anticlericali e laici del tempo.

23 A Federico il Grande che gli chiedeva in quale scienza fosse più esperto, Lambert rispose seccamente: «In tutte».

la difficoltà: essa, infatti, contiene di solito o la proposizione che si vuole dimostrare o un postulato equivalente.

Fig. 11 - Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

Lambert espose le sue ricerche sul 5° postulato nell'opera *Die Theorie der Parallellinien* scritta nel 1766 ma pubblicata dieci anni dopo, servendosi per la sua dimostrazione di un quadrilatero trirettangolo, cioè con tre angoli retti, già utilizzato dal matematico e fisico egiziano Alhazen (965-1040).[24] Analogamente a quanto fece Saccheri, Lambert considerò le tre possibilità per il quarto angolo: retto, acuto, ottuso, che corrispondevano al quinto postulato e alle sue due possibili negazioni.

Insomma, si continuava nell'errore di ritenere il 5° postulato un teorema e mentre illustri matematici non si arrendevano di fronte ai numerosi insuccessi così a lungo collezionati, un valente studente di teologia dell'Università di Gottinga, G.S. Klugel (1739-1812), poi dedicatosi alla matematica, fu il primo a dichiarare pubblicamente nel 1763 l'impossibilità di dimostrare il postulato delle parallele, nella sua dissertazione *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*. La sua affermazione, però, non era confortata da una dimostrazione di indimostrabilità, ma derivava semplicemente dalla constatazione che i ben 82 tentativi di provarlo, da lui esaminati, compreso quello di Saccheri, erano tutti non corretti e che nel migliore dei casi costituivano un circolo vizioso in quanto assumevano come ipotesi una premessa equivalente al 5° postulato che intendevano dimostrare.[25] Pur non avendo alcun valore logico, la dichiarazione di Klugel è significativa, perché denota a quale stato di estrema stanchezza era giunto il problema delle parallele.

24 In arabo Hasan Ibn al-Haitham Cfr. Luca Nicotra, *Op. cit.*, p. 85.

25 Herbert Meschkowski, *Op. cit.*, p. 32.

4 - Le forme equivalenti del 5° postulato

La ragione di tutti i fallimenti di dimostrazione del postulato delle parallele era dunque l'utilizzo, come ipotesi, di forme equivalenti al quinto postulato stesso che costituiva la tesi.

Il 5° postulato può assumere varie forme, che mettono in evidenza proprietà differenti ma reciprocamente deducibili l'una dall'altra e quindi equivalenti. Ciò significa, per esempio, che dette α e β due di tali forme, se si considera come postulato α, allora β è un teorema deducibile da α e viceversa, se si considera come postulato β, allora α è un teorema deducibile da β, sulla base dei precedenti postulati.

Enunciati equivalenti alla forma originaria del 5° postulato di Euclide, sono:[26]

- *Gli angoli interni da una stessa parte, formati da due parallele con una trasversale sono supplementari* (Tolomeo).
- *Due rette parallele sono equidistanti* (Posidonio).
- *Se una retta incontra una di due parallele, incontra l'altra (*Proclo).
- *Il luogo dei punti di un piano equidistanti da una retta, e giacenti da una stessa banda rispetto ad essa, è una retta* (Alhazen).
- *Per tre punti non in linea retta passa sempre una sfera* (Wolfgang Farkas Bolyai).
- *In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo rettilineo è uguale a due retti* (Saccheri-Legendre).
- *Di un triangolo qualunque può sempre costruirsi un triangolo simile di grandezza arbitraria*[27] (John Wallis).

Ma la forma che ha dato al 5° postulato il nome di "postulato delle parallele" con il quale esso è più noto è:

---

26 Cfr. Roberto Bonola *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee*, pp. 267-271, in Federigo Enriques - *Questioni riguardanti le matematiche elementari, volume I: critica dei principii*, Bologna, Zanichelli, 1912. Ivi si precisa anche quali sono gli enunciati equivalenti al 5° postulato euclideo senza ammettere il postulato della continuità di Eudosso-Archimede.

27 Si ricorda che due poligoni sono simili se gli angoli dell'uno sono uguali ai corrispondenti dell'altro e se è identico il rapporto fra i lati opposti agli angoli corrispondenti uguali.

- *Per un punto fuori di una retta, in un piano, si può condurre una parallela e una soltanto alla retta data* (John Playfair, 1748-1819) .

Paradossalmente si è poi capito che per dimostrare l'indipendenza del 5° postulato dai primi quattro il metodo corretto - lo vedremo più avanti - è proprio quello di costruire una geometria in cui non valga il 5° postulato di Euclide - perciò detta non euclidea[28] - e dimostrarne la validità logica. Tutto il contrario, quindi, degli sforzi millenari fatti per dimostrare invece la contraddittorietà delle geometrie non euclidee, nella convinzione che il 5° postulato fosse un teorema. Ma come dimostrare la validità logica della geometria non euclidea? La strada maestra sarebbe esaminare "tutti" i suoi teoremi e accertarsi che fra essi non vi siano contraddizioni. Tuttavia, questa strada è letteralmente"impercorribile", perché, per quanto vasto possa essere lo sviluppo dato alla geometria non euclidea, rimarrebbe sempre il giustificato sospetto che altri teoremi ancora ne possano far parte, a noi ancora ignoti, e che proprio fra questi possano annidarsi affermazioni contraddittorie.

Il metodo corretto fu esposto nel 1868 da Eugenio Beltrami, soltanto dopo che le geometrie non euclidee furono sviluppate da Lobacevskj nel 1829, da Bolyai nel 1832 e da Riemann nel 1854. Esso consiste nel trovare all'interno della geometria euclidea degli enti geometrici che soddisfino i postulati della geometria non euclidea. Tali enti costituiscono allora un "modello" euclideo della geometria non euclidea e come tale validano quest'ultima: se la geometria euclidea è valida logicamente allora lo è anche la geometria non euclidea, in quanto interpretabile in maniera euclidea. In questo modo la validità della geometria non euclidea è ricondotta a quella della geometria euclidea, la cui validità si assume come "assoluta", in quanto rispondente alla realtà fisica, che non può essere contraddittoria.[29] Riappare,

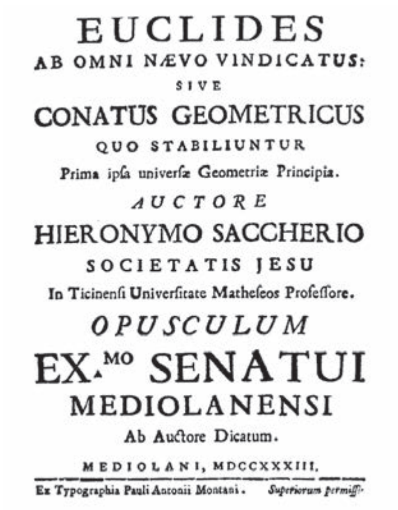
28 A rigore per geometria non-euclidea si dovrebbe intendere una qualunque geometria fondata su postulati differenti da quelli euclidei. Nell'uso corrente, invece, tale denominazione si riserva alle due geometrie fondate sulla sostituzione del quinto postulato con le sue due possibili negazioni e sui rimanenti postulati euclidei.

29 Nel 1871 Felix Klein pubblicò due scritti sulla geometria non euclidea, O*n the So-called Non-Euclidean Geometry,* in cui mostrò che le varie geometrie dello spazio ordinario si possono ottenere (in un modo che si puo' rendere preciso) fissando una conica nel piano

alla fine, il concetto della moderna scienza galileiana: è vero ciò che è in accordo con l'esperienza fisica.

5 - Saccheri, "vindex" di Euclide

Nell' *Euclides ab omni naevo vindicatus* Saccheri, fervido seguace di Euclide, tentando di derivare il 5° postulato dai precedenti, per tutti evidenti e quindi "veri" nel senso tradizionale del termine, credette di poter consacrare finalmente la verità eterna e assoluta della geometria euclidea, dissipando qualsiasi dubbio sulla sua validità. Infatti, se non si fosse riusciti a dimostrarlo, o ancor peggio se si fosse riusciti a dimostrarne la indimostrabilità, ci si sarebbe dovuti rassegnare, come genialmente in realtà aveva fatto Euclide stesso,[30] ad accettarlo come postulato, ma sarebbe rimasta impregiudicata la sua mancanza di evidenza e quindi il suo difetto di verità, essendo nel pensiero filosofico-scientifico di quei tempi vero soltanto ciò che ha una realtà oggettiva, fisica. Per tali motivi, ci si sarebbe trovati di fronte a una situazione imbarazzante: da una parte la costrizione ad accettarlo come postulato, dall'altra la riluttanza a farlo, in ossequio al concetto di vero fino ad allora imperante. Inoltre, il dubbio sulla "verità" del 5° postulato avrebbe inficiato altre parti degli *Elementi* di Euclide, che di esso si servono per la dimostrazione di vari teoremi, con lo sconsolante



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Fig. 12 - L' *Euclides ab omni naevo vindicatus*, **(1733) di Giovanni Gerolamo Saccheri.**

all'infinito dello spazio.

30 Proprio per tale riconoscimento, la critica moderna assegna ad Euclide un posto d'onore nella storia della matematica, e non tanto per il presunto valore logico della sua opera, in realtà, come accennato precedentemente, lacunoso.

effetto di veder crollare la millenaria fede nell'unica geometria fino ad allora conosciuta.

Saccheri cercò di conseguire il suo scopo applicando il tipo di ragionamento delle dimostrazioni per assurdo,[31] che aveva già illustrato magistralmente in una sua precedente opera intitolata *Logica demonstrativa* (1697), dove ne aveva posto in rilievo la loro generalità e le feconde applicazioni.

Ripercorriamo assieme il suo ragionamento. Indichiamo con:

- α l'insieme dei postulati euclidei;
- con $\Sigma(\alpha)$ l'insieme dei teoremi derivabili da α, vale a dire la geometria costruita sopra α (geometria euclidea);
- con E il 5° postulato di Euclide, che fa parte di α;
- con α' l'insieme dei postulati euclidei nel quale E è sostituito dalla sua negazione $\neg$E, vale a dire $\alpha' = \alpha - E + \neg E$;
- con $\Sigma(\alpha')$ l'insieme dei teoremi derivabili da α', vale a dire la geometria costruita sopra α' (geometria non euclidea).

Se E fosse un teorema di $\Sigma(\alpha)$, sarebbe derivabile dai postulati α – E, e quindi sarebbe anche un teorema di $\Sigma(\alpha')$. Infatti, poiché $\Sigma(\alpha')$ contiene tutti i teoremi derivati dai postulati $\alpha' = \alpha - E + \neg E$, conterrebbe anche E, come teorema derivabile dai postulati α – E. Dunque, la geometria $\Sigma(\alpha')$ sarebbe contraddittoria, poiché conterrebbe due proposizioni che sono la negazione l'una dell'altra: E, $\neg$E.[32] In altre parole la geometria $\Sigma(\alpha')$ costituita dalle prime 28 proposizioni di Euclide + la negazione del 5° postulato + tutte le proposizioni derivate risulterebbe contraddittoria perché conterrebbe sia la negazione

31 Già Gerolamo Cardano nella sua opera *Opus de proportionibus* e C. Clavio, celebre commentatore di Euclide, avevano illustrato tale tipo di ragionamento ma con minor efficacia.

32 Ovvero proposizioni del tipo "p è vero" e "p è falso", cioè proposizioni che hanno contemporaneamente i due valori "vero" e "falso". Due proposizioni contrarie sono però contraddittorie soltanto se si riferiscono allo stesso soggetto. Per esempio non sono contraddittorie le proposizioni contrarie: "esistono triangoli isosceli" e "esistono triangoli non isosceli", in quanto entrambe sono vere riferendosi a elementi diversi dell'insieme dei triangoli, costituendone due sottoinsiemi complementari; mentre sono contraddittorie le proposizioni "il triangolo ABC è isoscele" e "il triangolo ABC non è isoscele" in quando contrarie e relative allo stesso triangolo.

del 5° postulato sia il 5° postulato stesso, che, come teorema, sarebbe conseguenza delle prime 28 proposizioni degli *Elementi*. Dunque, per dimostrare che il 5° postulato è un teorema, sarebbe sufficiente mostrare che la geometria non euclidea $\Sigma(\alpha')$ è contraddittoria.

In base a queste osservazioni Saccheri, non soltanto avrebbe emendato gli *Elementi* da ogni "difetto", ma avrebbe parimenti celebrato il trionfo della geometria euclidea, che sarebbe risultata inequivocabilmente l'unica geometria coerente e possibile, risultando false le altre geometrie[33] fondate sulle due possibili negazioni del postulato delle parallele e sui rimanenti postulati della geometria euclidea. Ma Saccheri commise l'errore di iniziare le sue considerazioni assumendo come premessa proprio una forma equivalente del 5° postulato stesso che si proponeva di dimostrare: la cosiddetta ipotesi dell'angolo retto.

Fig. 13 - Quadrilatero di Saccheri.

Per le estremità di un segmento AB (figura 13) si conducano due segmenti AD, BC uguali e perpendicolari ad AB, e infine si tracci la congiungente CD. Al lettore, ora, si chiede uno sforzo d'immaginazione: la figura ottenuta non deve essere considerata come un rettangolo (cosa che verrebbe spontaneo di fare!), poiché dal punto di vista logico ciò implicherebbe l'ammissione che gli angoli ADC e BCD siano retti.[34] La nostra mente non deve essere condizionata dai "suggerimenti" che provengono dall'osservazione della figura disegnata sul piano euclideo a noi divenuto familiare e che ci porterebbe senza esitazione ad affermare essere retti i due angoli suddetti. In realtà, l'unica cosa che sappiamo è che i due angoli DAB e CBA sono retti per costruzione, ma nulla sappiamo sugli angoli ADC e BCD, per i quali, quindi,

33 All'epoca, l'unico dubbio sulla geometria euclidea riguardava la verità del quinto postulato, mentre nulla si aveva da obiettare sui rimanenti postulati; per questi, quindi, non c'era alcuna ragione di sostituirli con altri.

34 Il quadrilatero birettangolo di figura 13 è noto come quadrilatero di Saccheri, ma in realtà esso era stato utilizzato già dal matematico e poeta persiano Omar Khayyam (1050-1122). Cfr. Luca Nicotra, *Op. cit.*, p. 86.

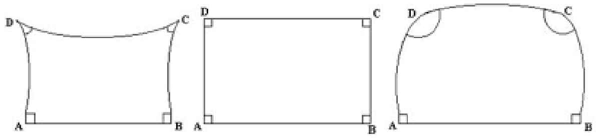


Fig. 14 - Le tre ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso del quadrilatero di Saccheri.

possiamo legittimamente prendere in considerazione le tre possibilità seguenti: acuti, retti, ottusi, come indicato in figura 14. Ebbene, è possibile dimostrare, senza far uso del postulato delle parallele, ma soltanto dei precedenti quattro postulati, che quegli angoli sono uguali ma non che sono retti o acuti od ottusi. Invece, servendosi del postulato delle parallele, si può dimostrare che gli angoli ADC e BCD sono retti e, viceversa, se si ammette come postulato che essi sono retti allora si deduce la proposizione nota come postulato delle parallele. Dunque il 5° postulato e il postulato dell'angolo retto (cioè il postulato che gli angoli ADC e BCD siano retti) sono equivalenti, perché reciprocamente deducibili l'uno dall'altro.

Le tre ipotesi dell'angolo retto, acuto e ottuso si escludono a vicenda ed esauriscono tutti i casi possibili relativi alla natura dei due angoli ADC e BCD. Pertanto, le ultime due ipotesi, dell'angolo acuto e dell'angolo ottuso, costituiscono i due soli modi di negare il 5° postulato.

Saccheri, sostituendo separatamente quest'ultimo con quelle due ipotesi, costruì due nuove geometrie, dette "geometria dell'angolo acuto" e "geometria dell'angolo ottuso", mirando a mostrare la loro contraddittorietà e quindi la falsità di ciascuna di esse. Egli, però, da quel grande logico che era, fin quando seguì la via del più rigoroso ragionamento, non riuscì a trovare alcuna contraddizione. A un certo punto, il tono delle sue argomentazioni inspiegabilmente muta e da irreprensibili diventano oscure e inconcludenti a proposito della geometria dell'angolo acuto, che Saccheri condanna come falsa, senza in realtà mostrarne la contraddittorietà. La geometria dell'angolo ottuso, a sua volta, viene da lui liquidata come falsa, grazie a un uso improprio degli infinitesimali.[35] Inoltre, in corrispondenza alle tre ipotesi dell'angolo acuto, retto e ottuso, Saccheri dimostrò anche che la somma degli angoli interni di un triangolo è inferiore, pari e superiore a due angoli retti.

Beltrami rimase perplesso davanti a una così clamorosa inversione di marcia, proprio quando le circostanze avrebbero dovuto far emettere a Saccheri un giudizio di coerenza per ciascuna delle due nuove geometrie. L'impressione che se ne ricava è una deliberata capitolazione dinanzi alla sconcertante verità di quei due nuovi mondi geometrici tanto diversi da quello euclideo, ritenuto fino ad allora l'unico possibile:

> O Saccheri era ben risoluto a sacrificare la propria ragione sull'altare della fede in Euclide, oppure non osava confessare la sua fede in una geometria eretica. Questo repentino ripudio di ogni elementare principio di logica colpì il laico Beltrami come un'offesa all'ordine naturale delle cose. Un logico dell'acutezza di Saccheri, egli si disse, non poteva assolutamente essere giunto a quella conclusione, non avrebbe mai potuto, fin tanto che la sua mente fosse in grado di funzionare. Perché dunque fingeva di averla accettata? La risposta è immediata: paura. Saccheri non osava insinuare che la nuova geometria era vera. Euclide, il geometra senza menda, era sacro quasi quanto Aristotile, il logico infallibile. Negare Euclide sarebbe stato lo stesso che mettere in dubbio la logica classica, grazie alla quale erano stati fissati per tutta l'eternità i dogmi fondamentali della teologia ufficiale. Sostenere che un sistema non euclideo potesse essere vero al pari di quello d'Euclide, sarebbe stato un invito temerario alle repressioni e ai provvedimenti disciplinari. Per questo il Copernico della geometria[36] ricorse al sotterfugio: denunciò egli stesso la falsità

35 Chi volesse seguire più in dettaglio le argomentazioni seguite da Saccheri, per invalidare le due geometrie non euclidee da lui stesso scoperte, può consultare il bel libro di Evandro Agazzi e Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare,* La Scuola, Brescia, 1998.

36 Il titolo di "Copernico della geometria" fu dato dall'inglese W. K. Clifford (1845-1879) al matematico russo N. Lobacevskij quando non era ancora nota l'opera di Saccheri. Per molte analogie, oltre che per diritto di priorità, il titolo spetta più a Saccheri che a Lobacevskij. Infatti, per sfuggire alla persecuzione ecclesiastica, Copernico , ecclesiastico come Saccheri, presentò la sua teoria come semplice congettura e vide la prima copia della sua opera quand'era già sul letto di morte. Analoghe circostanze si ripeterono per Saccheri, che fece "stampare" e non "pubblicare" la sua opera l'anno stesso che morì. La semplice stampa non seguita da una vera pubblicazione fu il motivo dell'oblio in cui cadde l'*Euclides*

della sua scoperta, sperando che questo pio tradimento gli valesse l'indulgenza della censura e quindi il permesso di stampare il libro.[37]

Le dimostrazioni per riduzione all'assurdo

In che cosa consiste questo metodo di dimostrazione, detto di "riduzione all'assurdo", largamente usato dai matematici greci? Vediamolo. In ogni dimostrazione esistono un'ipotesi I, cioè ciò che si ammette essere vero, e una tesi T, cioè ciò che si vuole dimostrare essere vero in conseguenza dell'ipotesi assunta. In una dimostrazione diretta si mostra che da I consegue T, in virtù di altre proposizioni già dimostrate servendosi delle regole inferenziali della logica. Nelle dimostrazioni per assurdo, invece, si segue un metodo indiretto, mostrando che assumendo "temporaneamente" che sia vero ⌐T[1] allora consegue ⌐I, vale a dire si mostra che dalla negazione della tesi discende la negazione dell'ipotesi, e ciò è assurdo poiché l'ipotesi I è la proposizione che accettiamo vera per assunzione e d'altra parte, per il principio di contraddizione, essa non può essere contemporaneamente I e ⌐I. Dunque, se la negazione della tesi porta a una contraddizione, per il principio del terzo escluso[2] dev'essere vero T e non ⌐T, come volevasi dimostrare.

1 Il simbolo ⌐ significa negazione. Pertanto ⌐T sta per non-T.

2 Si ricorda che per tale principio è vera o la proposizione A o la proposizione contraria ⌐A, non essendoci altre alternative.

La dimostrazione di verità geometriche diverse avrebbe fatto perdere alla geometria di Euclide il suo monopolio millenario e ogni carattere di assolutismo. Si trattava dunque di una presa di posizione che avrebbe avuto gravi ripercussioni, attaccando ancora una volta, e ancor più che nel caso della rivoluzione copernicana, il gretto conservatorismo intellettuale che viveva di assoluti:

ab omni naevo vindicatus.

37 Eric Temple Bell, *La magia dei numeri,* Milano, Longanesi, 1949, pp. 357-358.

> L'*Euclides* poteva si essere falso, e falso l'aveva definito Saccheri, forse nella disperata speranza che la sua storica scoperta non perisse con lui, ma restava pur sempre un libro troppo carico di significati e di suggestioni perché si potesse lasciarlo circolare liberamente. Così chiaro e convincente era il ragionamento del Saccheri nell'esposizione delle nuove geometrie, che ogni mente razionale, nel seguire quelle dimostrazioni seducenti, poteva soggiacere a pensieri illeciti. Pur lasciando impregiudicata la questione se il libro sia stato deliberatamente soppresso, è certo che una politica conservativa, per essere coerente con se stessa, avrebbe dovuto procedere alla sua soppressione per ragioni di sicurezza. I suoi insegnamenti erano antitetici a quelli di coloro che ne avevano autorizzato la stampa ed è noto che quando un organismo si divide in due parti contrastanti, le sue probabilità di sopravvivenza sono minime.[38]

Saccheri, dunque, nell'intento di sanare la geometria euclidea tentando di dimostrare il 5° postulato, suo malgrado scoprì invece per primo le geometrie non euclidee[39] fondate sulle due sue possibili negazioni: la geometria dell'angolo acuto e la geometria dell'angolo ottuso, che egli però, come abbiamo visto, non volle riconoscere come valide. Quasi un secolo dopo tali geometrie furono ritrovate, indipendentemente, la prima da Lobacevskij, Bolyai e Gauss e la seconda da Riemann. Esse però sono oggi meglio conosciute con i nomi dati

---

38 Eric Temple Bell, *La magia dei numeri. Op. cit.* , p. 358-359.

39 Per le geometrie non euclidee cfr. Renato Betti, *Lobačevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Milano, Bruno Mondadori , 2005; Evandro Agazzi, Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare,* La Scuola, Brescia, 1998; In Federigo Enriques - *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, *volume I: critica dei principii*, Bologna, Zanichelli, 1912, il lungo saggio di Roberto Bonola *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee*, pp. 247-363; Gino Fano, *Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività*, Bologna, Zanichelli, 1935; Bonola, *Geometria non euclidea, esposizione storico - critica del suo sviluppo*, Bologna, Zanichelli, 1906; Nikolaj Ivanovic Lobacevskij - *Nuovi principi della geometria*, Torino, Boringhieri, 1963; Carl B. Boyer - *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1990, pp. 502-503, 534-536, 620-631; AA. VV., *Per un insegnamento moderno della matematica*, edito sotto il patrocinio del Ministero Pubblica Istruzione e dell'O.C.S.E. per le classi pilota in matematica, Bologna, Patron, 1963; Edward Stabler, *Il pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1970, pp. 32-41; Eric Temple Bell, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1950; Herbert Meschkowski, *Mutamenti nel pensiero matematico,* Torino, Boringhieri, 1960, pp. 28-39; Henry Poincaré, *La scienza e l'ipotesi,* Firenze, La Nuova Italia, 1950, pp. 45-59.; Pietro Nastasi, *Le conferenze americane di Felix Kein*, in Pristem Storia 3-4, Milano, Springer-Verlag, 2000;

successivamente dal grande matematico tedesco Felix Klein (1849-1925). La geometria dell'angolo acuto (o di Lobacevskij-Bolyai-Gauss) fu denominata da Klein geometria iperbolica, poiché ammettendo infinite parallele a una retta data per un punto fuori di essa è in eccesso rispetto alla euclidea. La geometria dell'angolo ottuso (o di Riemann) fu denominata da Klein geometria ellittica, poiché non ammettendo nessuna parallela a una retta data per punto fuori di essa è in difetto rispetto alla euclidea. La geometria euclidea fu denominata parabolica.[40]

Fu invece Gauss, nel 1824, a denominare *geometrie non euclidee* le geometrie costruite sui primi quattro postulati euclidei e sulle negazioni del quinto. Nelle pagine che seguono non entrerò nella trattazione matematica delle geometrie non euclidee, che ci porterebbe fuori dei limiti divulgativi. Rimanendo sempre nel carattere "concettuale" dell'esposizione, saranno invece accennati alcuni modelli euclidei delle due geometrie non euclidee, di facile comprensione anche per il lettore non matematico.

6 - La geometria iperbolica di Lobacevskij-Bolyai-Gauss

Così Renato Betti descrive Lobacevskij (1792-1856):

> Nikolaj Ivanovic Lobacevskij è professore ordinario della Università di Kazan' fin dal 1816. Viene descritto come una persona di statura alta, la figura asciutta, l'aspetto accigliato e spesso pensieroso. Gli si conoscono poche amicizie. In tutte le immagini di cui disponiamo, appare con un'aria severa che fa pensare a una persona dal temperamento triste. Si tratta spesso di fotografie ufficiali che lo ritraggono in posa, con l'uniforme dei professori e qualche decorazione, e dalle quali si coglie in ogni caso un atteggiamento di sfida e di tenacia.[41]

40 Klein utilizzò per le denominazioni delle tre geometrie i termini greci nel loro significato originario con evidente riferimento alle tre possibilità di avere una parallela, più parallele o nessuna parallela a una retta data per un punto fuori di essa: parabola dal greco *paraballein* = metter in parallelo, iperbole dal greco *hyperballein* = mettere oltre, ellisse dal greco *élleipsis* = mancanza.

41 Renato Betti, *Op. cit*. cap. I.

Lobacevskij, sicuramente ignaro dell'opera di Saccheri, nella sua memoria *Exposition succincte des principes de la geometrie avec une demonstration rigoureuse du theoreme des paralleles*, letta l'11 febbraio 1826 alla facoltà fisico-matematica dell'Università di Kazan', rivelò per primo al mondo scientifico l'esistenza di una geometria non euclidea, che conteneva molti dei risultati già ottenuti nel 1733 da Saccheri. Il manoscritto della relazione, scritta in francese forse nella speranza di una diffusione ampia, fu sottoposto all'esame di una commissione di professori dell'Università di Kazan' per la pubblicazione in una nuova rivista universitaria, «Memorie scientifiche dell'Università di Kazan'» (*Učënye zapiski Kazanskogo universiteta*), ma non fu mai pubblicato pur non avendo ricevuto ufficialmente un giudizio negativo.[42] Fu di fatto ignorato. L'interpretazione più accreditata di questo episodio è una deliberata insabbiatura della pratica, decisa dalla commissione per non offendere un collega con un giudizio negativo. Il manoscritto non fu restituito e la relazione del 1826 non fu quindi mai pubblicata. Di essa ne dà notizia Lobacevskij stesso nell'introduzione a un suo successivo articolo.[43] Il primo lavoro ufficiale di Lobacevskij sulla nuova geometria è da considerarsi quello apparso in articoli pubblicati nel 1829 e 1830 nella rivista «Messaggero di Kazan'» (*Kazanskij Vestnik*), con il titolo di *O nacalach geometrii* (*Sui principi della geometria*). Seguendo la consuetudine, universalmente accettata, secondo la quale la priorità di una scoperta scientifica spetta a chi per primo la rende pubblica, Lobacevskij è quindi considerato il padre delle geometrie non euclidee, anche se oggi sappiamo che tale titolo spetterebbe a Saccheri, la cui opera precedette di ben 96 anni quella del matematico russo ma non fu mai pubblicata.

Tuttavia, anche il lavoro di Lobacevskij del 1829 incontrò un

42 Cfr. Nikolay Ivanovic Lobacevskij, *Op. cit.*, p. 57 nota 1. I recensori erano l'astronomo Ivan Michajlovic Simonov, già compagno di studi di Lobacevskij, con il quale Lobacevskij era in un non dichiarato antagonismo, il chimico Arno1'f Jakov1evic Kupfer, all'epoca docente di fisica e il giovane professore aggiunto Niko1aj Dmitrevic Brasman, che aveva da poco terminato gli studi di matematica nella stessa università di Kazan'.

43 *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele (Novye načala geometrij s polnoj teoriej parallel'nyh)* pubblicato in più numeri, dal 1835 al 1838, della stessa rivista universitaria che avrebbe dovuto ospitare la sua relazione del 1826.

certo ostracismo da parte dell'Università di Kazan, che decise di pubblicarlo soltanto come pubblicazione interna, impedendone quindi una larga diffusione. Ciò spiega il ritardo con cui l'opera del grande matematico russo fu conosciuta in Europa, grazie ad altre tre diverse esposizioni della nuova geometria pubblicate alcuni anni più tardi con i titoli di *Novye načala geometrij s polnoj teoriej parallel'nyh* (*Nuovi principi di geometria con una teoria completa delle parallele*, 1835-1838), *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (*Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele*, 1840), libro scritto in tedesco e letto da Gauss, e *Pangeometria (Geometria Generale)*, pubblicata dall'Università di Kazan' prima in russo (1855) e poi in francese (1856). Nel 1867 nel «Giornale di Matematiche» di Giuseppe Battaglini venne pubblicata la traduzione italiana del testo francese della *Pangéometrié,* costituendo così la prima pubblicazione all'estero della *Pangeometria*.

L'approccio di Lobacevskij al problema delle parallele è del tutto originale, opposto a quello di tutti i suoi predecessori. Egli, infatti, non si preoccupa di dimostrare il 5° postulato, ma ne mette in dubbio la sua verità universale e, quindi, anche quella della geometria euclidea:

> Per usare i termini di Einstein, Lobacevskij sfidò un assioma. Chiunque si attenti a sfidare una verità accettata, che è sembrata necessaria e ragionevole alla grande maggioranza degli uomini intelligenti durante almeno duemila anni, rischia la propria reputazione scientifica, se non addirittura la vita.[44]

Contrariamente alle convinzioni filosofiche saldamente e universalmente accettate riguardo alla "necessità a priori" delle concezioni geometriche euclidee, per Lobacevskij le idee della geometria devono avere una giustificazione empirica, sono quindi "giudizi sintetici a posteriori", per dirla con Kant. Da qui la sua critica alla non esauriente giustificazione empirica delle idee della geometria euclidea, che lo portò a concepire la possibilità di un'altra geometria fondata sulla sostituzione del 5° postulato con una delle sue due possibili negazioni.

44 Eric Temple Bell, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1950, p. 311.

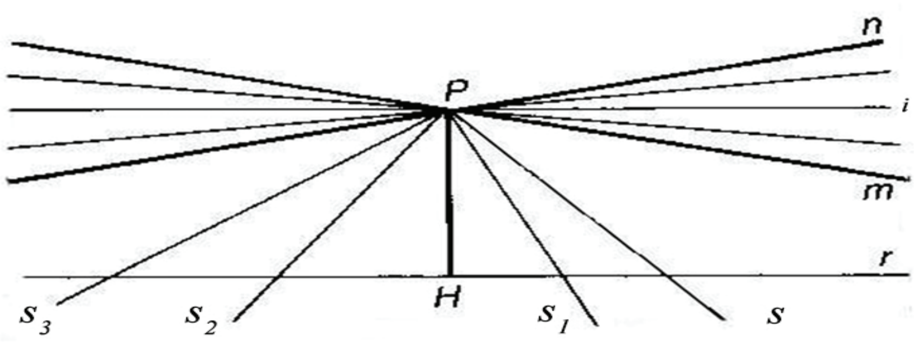
Fig. 15 - Nicolaj Ivanovic Lobacevskij (1792-1856).

L'obiezione che Lobacevskij muoveva alla rispondenza della geometria euclidea alla realtà fisica derivava dalla sua particolare e originale concezione sperimentale dei postulati e delle idee primitive della geometria, profondamente diversa da quella euclidea.

Egli, infatti, non riconosceva come primitivi i concetti di punto, retta e piano che, invece, definiva come derivati dai concetti di corpo (che per Lobacevskij è un qualsiasi solido deformabile senza lacerazioni fino a ottenere una sfera), di contatto fra corpi e di movimento rigido, che considerava primitivi.[45]

In tale ordine d'idee, per Lobacevskij il 5° postulato di Euclide non risultava accettabile come unico possibile, oltre che logicamente anche, e prima di tutto, sperimentalmente. Infatti, esso non può essere soggetto a verifica sperimentale, perché questa dovrebbe prolungarsi all'infinito, in contraddizione con il carattere finito di ogni sperimentazione. E allora, chi assicura che "in realtà" (quella fisica!) le due rette siano veramente parallele? Può darsi che sia possibile costruire una "curva" equidistante da una retta assegnata passante per un punto fuori di essa e che tale curva, in una porzione di lunghezza finita, anche se molto estesa, sia effettivamente rettilinea, ma che non lo sia più successivamente. È questo il concetto di curva equidistante introdotto da Lobacevskij, il quale metteva in dubbio che, considerando una realtà fisica di dimensioni assai superiori di quelle del mondo ordinario, il luogo dei punti equidistanti da una retta data, e giacenti da una stessa parte rispetto ad essa, fosse una retta, ovvero metteva in dubbio la validità del 5° postulato a quel livello di realtà fisica, che certamente Euclide non prese in considerazione. Spingendosi ancora oltre, il matematico russo costruì una geometria fondata sui primi quattro postulati di Euclide e sulla seguente negazione del 5° postu-

45 Per un'analisi dettagliata di tali idee si rimanda all'opera divulgativa di Lobacevskij *Nuovi principi della geometria*, op. cit., trad. it. di Lucio Lombardo Radice.



Fig, 16 - Angolo di parallelismo della geometria iperbolica di Lobacevskij. Le rette tipo *s* sono le secanti della retta *r*. Le rette tipo *i* le iperparallele e le rette *m, n* le due parallele per P alla retta *r*.

lato: per un punto P fuori di una retta data *r* passa più di una retta parallela alla *r*. Lobacevskij dimostrò che esistono due parallele alla retta *r* passanti per il punto P e che tali rette delimitano due angoli, uno dei quali, detto angolo di parallelismo,[46] gode della proprietà che qualunque retta per *P* in esso giacente è anch'essa parallela alla retta assegnata. In tale geometria, dunque, esistono non due ma infinite parallele a una retta data passanti per un punto ad essa esterno. Più precisamente le rette per *P* si distinguono in secanti (incontrano *r*) e non secanti (non incontrano *r*). Di queste ultime si dicono parallele a *r* le rette *m* e *n* che sono gli elementi di separazione fra le secanti (del tipo *s*) e le altre non secanti (del tipo *i*) dette iperparallele a *r* per *P* (figura 16). Le rette *m* e *n* sono le parallele a *r* nei suoi due versi, ossia il parallelismo è sempre relativo a uno dei due versi della retta *r*. L'angolo di parallelismo, inoltre, varia con la distanza di *P* da *r*.

Lobacevskij qualificò la sua geometria come "immaginaria, astrale, generale" o anche, con chiara derivazione dal greco, "pan-geometria", per mettere in evidenza il suo accordo con un mondo fisico di un ordine di grandezza assai superiore rispetto a quello del mondo terrestre e anche astronomico ordinario. Egli stesso, nella sua opera *Sui principi della geometria* (1829-1830), così commentò le sue

46 Il concetto di angolo di parallelismo si trova già nell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* di Saccheri.

osservazioni sperimentali sul triangolo Sole-Terra-Sirio:

> ...la natura stessa ci indica distanze tali, in paragone alle quali svaniscono per la loro piccolezza perfino le distanze delle stelle fisse dalla nostra Terra.

Con riferimento alla negazione del 5° postulato espresso nella forma equivalente di Saccheri-Legendre (la somma degli angoli interni di un triangolo rettilineo è pari a due retti), la pangeometria di Lobacevskij afferma che nel caso generale la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti, mentre soltanto nel caso particolare che ci si limiti a spazi delle dimensioni terrestri e astronomiche ordinarie essa è uguale con buona approssimazione a due retti, il che equivale a dire che è valida la geometria euclidea, che pertanto risulta un caso particolare della pangeometria: in tal caso l'angolo di parallelismo diventa nullo ed esiste una sola parallela a una retta data per un punto fuori di essa.

Gauss apprezzò molto l'opera di Lobacevskij, come risulta dal suo epistolario, ma non lo fece pubblicamente, per gli stessi motivi per i quali non pubblicò mai le proprie ricerche sullo stesso argomento: paura delle polemiche che si sarebbero accese con i kantiani. Nel 1842, tuttavia, Gauss fece nominare Lobacevskij membro della Società Scientifica di Gottinga, come riconoscimento dell'alto valore scientifico della sua opera. Tale soddisfazione fu però ben presto amareggiata da varie sciagure che colpirono Lobacevskij: la cecità e nel 1846, a 54 anni, a dispetto della sua fama e dei numerosi servizi resi alla scienza e alla Russia, il suo inspiegabile "licenziamento" dalla carica di rettore e di professore dell'Università di Kazan', dopo lunghi anni d'insegnamento. Era forse una "punizione" per il suo atto temerario di avere reso noto al mondo che, oltre l'euclidea, poteva esistere un'altra geometria altrettanto valida, di cui l'euclidea era un caso particolare? Questo non lo sapremo mai, ma il dubbio é lecito, viste le circostanze misteriose in cui avvenne l'allontanamento del grande matematico dalla vita pubblica del suo Paese, nonostante le vigorose proteste dei suoi colleghi.

Nella storia della scienza non è raro che più scienziati giungano contemporaneamente alla stessa scoperta in maniera indipendente. Nel passato, ciò era dovuto soprattutto alle difficoltà delle comunicazioni e della diffusione delle pubblicazioni.

Ciò accadde anche per le geometrie non euclidee. Infatti, indipendentemente l'uno dall'altro e nello stesso periodo di tempo, altri matematici del secolo XIX pervennero alla creazione della stessa geometria iperbolica di Lobacevskij.

L'ungherese Janòs Bolyai (1802-1860) nel 1832 pubblicò un'appendice all'opera *Tentamen* di suo padre, Wolfgang (o Farkas), intitolata *Scienza assoluta dello spazio*, che conteneva la stessa geometria non euclidea di Lobacevskij.

Fig. 17 - Janos Bolyai (1802-1860).

Janòs Bolyai non era un matematico di professione, come Lobacevskij, ma un ufficiale dell'esercito austro – ungarico, violinista di gran talento, ballerino impareggiabile, grande amante delle donne e provetto spadaccino. Di lui si racconta che in una sola giornata sfidò a duello tredici ufficiali, suoi compagni d'arme, e riuscì a vincerli tutti, suonando il violino tra un duello e l'altro per tenere la sua mano in esercizio.[47]

Ma ancor prima di Lobacevskij e Bolyai, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), *princeps mathematicorum*, aveva posto in dubbio la verità universale della geometria euclidea, giungendo a risultati analoghi a quelli della geometria non euclidea creata dal russo e dall'ungherese. Gauss, però, non pubblicò mai tali risultati, un po' per la sua proverbiale riluttanza a pubblicare e un po' per paura delle "strida dei Beoti".[48] Gauss si dedicò a tali studi saltuariamente per lunghi anni, come è testimoniato dalle numerose lettere inviate a colleghi e amici e da alcuni manoscritti trovati dopo la sua morte.

Da una lettera scritta all'amico Heinrich Christian Schumacher, risulta che Gauss fin dal 1792, cioè da quando aveva quindici anni, si occupò del postulato delle parallele, dapprima nell'intento di dimostrarlo e successivamente, invece, con la convinzione della possibilità logica di una geometria fondata sulla sua negazione. Questo atteggia-

47 Cfr. Cesare Lombroso, *L'uomo di genio*, Torino, Fratelli Bocca, 1894, p. 102.

48 Gauss, però, per nostra fortuna, annotava in un diario molti dei risultati da lui raggiunti, in una forma estremamente sintetica (in 19 pagine ben 146 risultati!).

mento di rottura è ben evidente in molte sue lettere, scritte negli anni successivi ai suoi tentativi di dimostrazione del 5° postulato. Il 16 dicembre 1799, a ventidue anni, nella lettera all'amico Wolfgang Bolyai, Gauss scriveva:

> ...solo che la via che ho imboccato conduce non già allo scopo che si desidera e che tu sostieni di aver raggiunto (la dimostrazione del V postulato di Euclide), ma piuttosto a mettere in dubbio la verità della geometria.

Fig. 18 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

E poi il 28 aprile 1817 nella lettera a Olbers:

> Mi persuado sempre di più che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata, non, per lo meno, dall'intelletto umano o per l'intelletto umano.

Particolarmente famosa è la lettera delle "strida dei Beoti" cioè dei seguaci di Kant, scritta da Gauss a Bessel il 27 gennaio 1829:

> In qualche ora libera sono talvolta tornato a riflettere su un altro argomento che per me è già vecchio di quasi quarant'anni; intendo parlare dei primi fondamenti della geometria; non so se Le ho già parlato delle mie idee in proposito. Anche su tale argomento ho ulteriormente consolidato alcuni punti, e la mia convinzione che non sia possibile fondare la geometria in modo interamente a priori è divenuta se possibile, ancora più salda. Intanto lascerò passare molto tempo prima di decidermi ad elaborare per la pubblicazione le mie assai ampie ricerche sull'argomento, e forse ciò non avverrà mai durante la mia vita, perché temerei le strida dei Beoti qualora volessi esprimere compiutamente le mie idee.

Ancora più esplicita appare la posizione di Gauss verso la geometria euclidea in un'altra lettera all'amico Bessel, datata 9 aprile 1830:

> .....dobbiamo umilmente riconoscere che mentre il numero è un

> puro prodotto del nostro spirito, lo spazio ha una realtà anche al di fuori del nostro spirito, e le sue leggi noi non le possiamo descrivere interamente a priori.

Nel gennaio 1832, Gauss ricevette dall'amico Wolfgang Farkas Bolyai copia dell'opera *Tentamen* con l'appendice *Scienza assoluta dello spazio* del figlio Janòs. Quando ebbe letta quest'ultima, così rispose al vecchio amico:

> Se comincio a dire che non posso lodare questo lavoro, tu certamente per un istante resterai meravigliato. Ma non posso fare altro: lodarlo sarebbe lodare me stesso; infatti, tutto il contenuto dell'Opera, la via spianata da tuo figlio, i risultati ai quali egli fu condotto coincidono quasi interamente con le mie meditazioni, che hanno occupato in parte la mia mente da trenta a trentacinque anni a questa parte. [...] Avevo l'idea di scrivere, col tempo, tutto ciò, perché esso non perisse con me. È dunque per me una gradevole sorpresa vedere che questa fatica può ora essere risparmiata, e sono estremamente contento che sia proprio il figlio del mio vecchio amico che mi abbia preceduto in modo così notevole.

Questa è una splendida testimonianza di come la vera grandezza dell'uomo coincida con la generosità e l'onestà e non conosca l'invidia! Fra l'altro, tale riconoscimento di Gauss ha un particolare valore, essendo nota la sua avarizia nell'esprimere apprezzamenti su altri matematici.

6.1 - Modelli euclidei della geometria iperbolica

Il primo modello euclideo di geometria non euclidea fu proposto da Eugenio Beltrami nel 1868 per la geometria iperbolica.[49] Gli assiomi e i teoremi della geometria iperbolica risultano verificati[50] su una superficie a raggio di curvatura costante, come nella sfera, ma negativo: da cui il nome di pseudosfera (figura 19). Tale superficie

49 Eugenio Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, «Giornale di matematiche», VI [1868], pp. 284-312.

50 Occorre precisare soltanto "localmente".

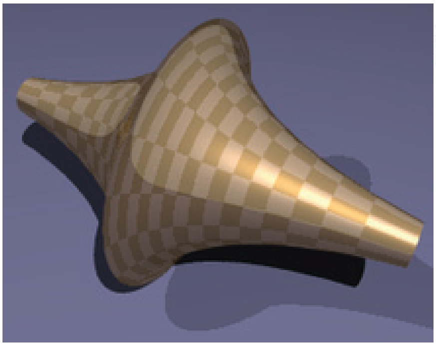


Fig. 19 - La pseudosfera di Eugenio Beltrami.

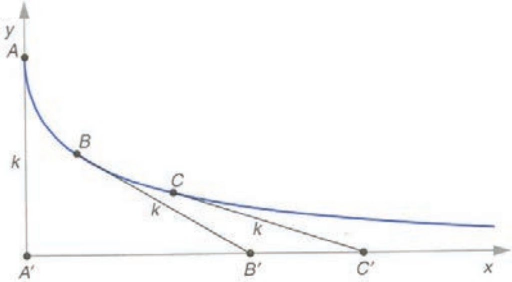


Fig. 20 - La curva "trattrice".

può essere pensata come generata dalla rotazione, attorno al suo asintoto, di una curva detta "trattrice" (figura 20), definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente compresi tra essa e l'asse x hanno lunghezza costante. L'asse x risulta essere un asintoto per la curva.[51] La trattrice può anche essere pensata come generata da un punto che viene trascinato lungo il piano xy da un segmento di lunghezza costante, da cui il nome della curva (dal latino *tractrix*, derivato da *trahere*, trainare).

Un altro modello euclideo, più facilmente comprensibile, della stessa geometria iperbolica fu proposto da Felix Klein (1849-1925).

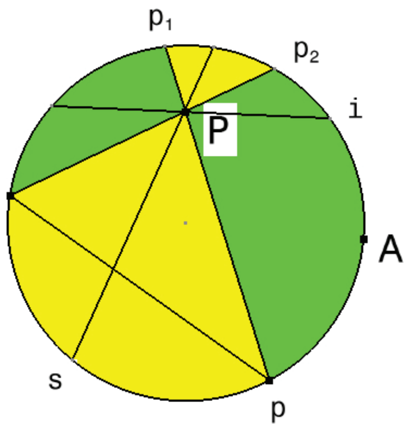
Fig. 21 - Felix Klein (1849-1925).

In esso il piano iperbolico è un cerchio[52] di cui si esclude il contorno, cioè la circonferenza che lo delimita. Non fanno parte quindi del piano iperbolico i punti di quest'ultima (per esempio A di figura 22). I punti iperbolici

51 Cioè una retta alla quale la curva si avvicina sempre di più senza mai "definitivamente raggiungerla". Nel caso generale una retta è asintoto di una curva se, pur incontrandola un numero finito o infinito di volte, si avvicina sempre di più alla curva senza mai azzerare la sua distanza da essa.

52 Più in generale la parte di piano euclideo racchiusa da una conica.

Fig. 22 - Modello di Klein. Le corde p_1, $p_2$sono le due rette iperboliche per P parallele alla retta p. Esse infatti non la incontrano in quanto i suoi estremi non appartengono al piano iperbolico, giacendo sulla circonferenza. Tutte le corde comprese nella regione gialla sono rette iperboliche secanti la retta p, mentre le corde comprese entro la regione verde (angolo di parallelismo) sono le iperparallele alla retta p passanti per il punto P. Il punto (euclideo) A non è un punto del piano iperbolico perchè giace sulla circonferenza.



sono i punti interni al cerchio. Le rette iperboliche sono le corde del cerchio, esclusi gli estremi, trovandosi sulla circonferenza (figura 22).

Un altro modello di piano iperbolico fu proposto dal grande matematico, fisico e filosofo francese Henry Poincaré (1854-1912), considerato l'ultimo scienziato universale per il carattere enciclopedico delle sue ricerche, tutte originali e di primo ordine. In tale modello il piano iperbolico e i punti iperbolici sono gli stessi del modello di Klein. Le rette iperboliche, invece, sono i diametri r_1 (rette di 1° tipo) e gli archi di circonferenza r_2 (rette di 2° tipo)perpendicolari nei loro estremi alla circonferenza che delimita il cerchio (figura 23).

Occorre osservare che in questi modelli la retta, essendo una corda (in particolare un diametro) o un arco di circonferenza della geometria euclidea, non sarebbe illimitata come recita il 2° postulato di Euclide: *un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta*. Per tale ragione, occorre ridefinire opportunamente il modo di misurare (detto dai matematici "metrica") i segmenti nella ge-

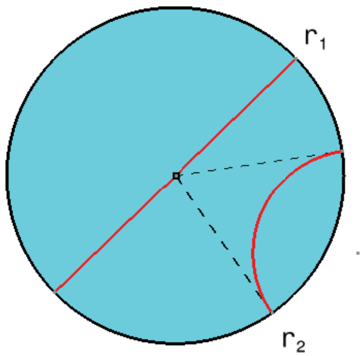


Fig. 23 - Modello di Poincaré.

ometria iperbolica, in maniera tale che le corde (e/o i diametri) e gli archi di circonferenza dei modelli di Klein e Poincarè diventino illimitati.

7 - La geometria ellittica di Riemann

Il grande matematico tedesco Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) sviluppò una seconda geometria non euclidea, fondata sull'altra possibile negazione del quinto postulato: per un punto fuori di una retta data non passa alcuna retta parallela ad essa, che ha come forme equivalenti, con riferimento al quadrilatero di Saccheri, l'ipotesi dell'angolo ottuso, nonché, con riferimento alla forma di Saccheri-Legendre, la proposizione: la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti.

Riemann, con le sue varietà o grandezze pluriestese, fu il primo a introdurre il concetto di spazi a più dimensioni e a introdurre la differenza fra curva illimitata e infinita.[53] Sulla superficie sferica risulta fisicamente valida la geometria di Riemann, mentre quella euclidea in tal caso fornisce una descrizione approssimata.

7.1 - Modelli euclidei della geometria ellittica

Nel modello euclideo della geometria ellittica, proposto dallo stesso Riemann, il piano ellittico è costituito da una superficie sferica, i punti ellittici sono le coppie di punti di tale superficie diametralmente opposti e le rette ellittiche sono i circoli massimi della sfera. In tale modello è facile verificare che non esistono parallele a una retta per un punto fuori di essa: infatti due circoli massimi qualunque si intersecano sempre in una coppia di punti euclidei diametralmente opposti (punto ellittico). Esso non verifica quindi la proposizione XXXI (teorema XXII) degli *Elementi* euclidei derivabile dai primi quattro postulati, secondo la quale è sempre possibile condurre

53 Una curva infinita prosegue indefinitamente dall'uno e dall'altro estremo. Una curva illimitata è invece percorribile indefinitamente ciclicamente (per esempio una curva chiusa).

Fig. 24 - Bernhard Riemann (1826-1866).

una parallela a una retta data per un punto fuori di essa.[54] In effetti mentre la geometria iperbolica nega soltanto il 5° postulato senza contraddire la geometria assoluta, quella ellittica crea invece una contraddizione. Per rimuovere questa contraddizione occorre modificare qualche altro postulato euclideo.[55] Infatti le rette ellittiche sono finite.

I modelli euclidei delle geometrie non euclidee, cui si è accennato, si riferiscono però alla geometria non euclidea piana. Fino ad oggi, non è stata sviluppata una geometria non euclidea "solida", in parallelo e alternativa alla geometria euclidea "solida". E poiché i modelli della geometria piana iperbolica ed ellittica, di Beltrami e Riemann, sono modelli euclidei tridimensionali (pseudosfera e sfera) ci si può chiedere: i modelli euclidei della geometria non euclidea "spaziale" vanno forse ricercati in uno spazio quadridimensionale? Lo spazio-tempo per esempio?

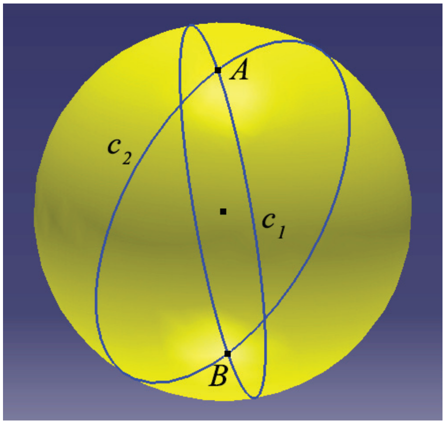


Fig. 25 - Modello di Riemann: la superficie sferica è il piano ellittico, i circoli massimi sono le rette ellittiche, le coppie di punti diametralmente opposti sono i punti ellittici.

54 Da non confondere con il 5° postulato che afferma che tale parallela è unica.

55 In modo che non sia più possibile dimostrare la proposizione XVI (teorema IX) relativa al teorema dell'angolo esterno di un triangolo (che risulta maggiore di ciascuno dei due interni non adiacenti), dalla quale deriva la proposizione XXXI.

8 - La diffusione delle geometrie non euclidee

Oltre Gauss vi furono altri tre precursori delle geometrie non euclidee.

Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857) nel mese di dicembre 1818 inviò un manoscritto a Gauss dal titolo *Astral Geometry,* nel quale affermava l'esistenza di una geometria in cui la somma degli angoli di un triangolo è inferiore a due angoli retti.[56] Gauss, dunque, non fu il primo ad affermare la possibilità di una geometria non-euclidea. Schweikart espresse la sua ipotesi molto chiaramente e spiegò che la geometria euclidea rientra come caso particolare di una geometria più generale, anticipando quindi l'idea della pangeometria di Lobacevskij.

Franz Adolph Taurinus (1794 - 1874), nipote di Schweikart, può essere considerato un precursore "tecnico", ma non "convinto", perché, pur non credendo nella possibilità dell'esistenza di geometrie non euclidee, riprese gli studi dello zio sulla teoria delle parallele nell'opera *Theorie der Parallellinien* (1825) e sviluppò nel 1826 la possibilità logico-matematica dell'esistenza delle geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica nell'appendice del suo volume *Geometriae prima elementa*. Costruì un modello della prima come geometria della sfera di raggio immaginario, della seconda come geometria della sfera ordinaria di raggio reale.

Friedrich Ludwig Wachter (1792-1817) era alunno di Gauss. Comunicò le sue ricerche sulle geometrie non euclidee a Gauss in una lettera del 1816 e nella sua opera *Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi*, pubblicata nell'anno della sua prematura morte, quando aveva appena venticinque anni.

L'Italia e la Francia sono stati i paesi dove le geometrie non euclidee maggiormente furono pubblicizzate, studiate e apprezzate. Negli anni dal 1866 al 1870 Felice Casorati, Giuseppe Battaglini, Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami, Enrico Betti, Jules Hoűel, con i loro studi e le loro traduzioni delle opere originali di Lobacevskij, Bolyai e Riemann, sono stati sicuramente gli artefici della lenta ma

56 Gerrit Mannoury, *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*, (1909).

inesorabile diffusione delle geometrie non-euclidee in Italia[57] e in Francia. Le geometrie non euclidee, pur essendo nominalmente entrate a buon diritto negli ambienti accademici, di fatto invece trovarono terreno ostile alla loro affermazione da parte di molti matematici, che le considerarono più come un curioso esercizio logico che non una nuova branca della matematica, non ravvedendo in esse possibili applicazioni. Probabilmente, proprio la mancanza di riconoscimenti ufficiali su di esse da parte di Gauss dovette avere una certa influenza negativa sulla loro diffusione. Infatti la pubblicazione della corrispondenza di Gauss nel 1860, cinque anni dopo la sua morte, rendendo pubbliche le sue ricerche sulle geometrie non euclidee, e sul significato della geometria, contribuì a porre in una nuova luce le nuove geometrie agli occhi dei matematici.

Il problema della posizione da prendere nei confronti delle nuove geometrie riguardò pure l'insegnamento scolastico nel nuovo Regno d'Italia. Nel 1867 la riforma della pubblica istruzione, varata dal ministro dell'istruzione Michele Coppino su indicazione dei matematici Enrico Betti, Francesco Brioschi e Luigi Cremona, introduceva nelle scuole di indirizzo classico gli *Elementi* di Euclide[58] come testo scolastico di geometria,[59] scatenando, attraverso le pagine del «Giornale di matematiche» di Giuseppe Battaglini, un'aspra polemica internazionale, che vide dalla controparte Guillaume Jules Hoüel, J. M. Wilson, Raffaele Rubini, Angelo Genocchi[60] e Battaglini stesso, che mettevano in discussione la validità della scelta degli *Ele-*

57 Cfr. P. Calleri. L Giacardi. *Le lettere di Giuseppe Battaglini a Jules Hoűel (1867- 1878). La diffusione delle geometrie non euclidee in Italia,* in «Rivista di Storia della Scienza», (2) 3(1) (1995), 127-209.

58 «Presso di noi, l'introduzione dell'Euclide nelle scuole ha reso un altro grandissimo servi gio: quello di sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo. Sgraziatamente in Italia i libri cattivi sono quelli che si vendono a miglior mercato, epperò hanno fortuna». (Luigi Cremona, «Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia», 24 ottobre 1867).

59 Enrico Betti, Francesco Brioschi, *Gli Elementi di Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei* , Firenze, Le Monnier, 1867.

60 Angelo Genocchi era un giovane avvocato piacentino che si appassionò alla matematica tanto da ricevere l'incarico di insegnare, dal 1857, algebra e geometria complementare all'Università di Torino.

menti euclidei come testo scolastico, del quale già si riconoscevano i numerosi difetti[61] e che ignorava l'emergere delle geometrie non euclidee, che vennero bollate come «geometrie del soprasensibile» o «da manicomio».

Anche la geometria ellittica di Riemann, malgrado l'indiscusso e riconosciuto valore scientifico di questi, fece fatica ad affermarsi in Europa. In Italia Riemann fu studiato e ammirato con una particolare dedizione, quasi affettuosa. Per alcuni anni soggiornò nel nostro Paese, dove sperava di trovare rimedio alle sue precarie condizioni di salute. In quegli anni i nostri maggiori matematici del tempo, Enrico Betti, Felice Casorati ed Eugenio Beltrami ebbero l'occasione di avere con lui intensi e continui scambi di idee, che certamente contribuirono a una maggior conoscenza delle sue teorie, che a molti apparivano ostiche. Betti fu più di ogni altro suo grande ammiratore e amico e fece di tutto per convincere Riemann a insegnare all'Università di Pisa, incarico che il matematico tedesco dovette declinare per gravi motivi di salute.

Un decisivo contributo a gettare nuova luce sulle geometrie non euclidee fu senz'altro l'apparizione nel 1868 del già citato lavoro di Beltrami *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, con il quale veniva identificato nella superficie a curvatura costante negativa della pseudosfera il primo modello euclideo della geometria iperbolica. In tal modo, il mondo inizialmente ritenuto "immaginario" della geometria iperbolica veniva ricondotto all'usuale mondo euclideo, permettendo quindi di visualizzare tramite entità geometriche euclidee figure e concetti della geometria non euclidea iperbolica.

Lo scetticismo con cui le nuove geometrie erano state accolte nel mondo matematico ufficiale ricevette un altro duro colpo quando, nel 1884, Henry Poincaré mostrò un'importante applicazione della geometria iperbolica nella teoria delle funzioni fuchsiane di variabile complessa. Felix Klein (1848-1925) trovò inoltre applicazioni della

61 J. M. Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry, in* "Educational Times", 1868, pp. 125-128 tradotto da Raffaele Rubini in *Euclide come testo di Geometria Elementare*, in «Giornale di matematiche» 6 (1868), pp. 361-368: «... a book which has so unscientific an aim, and has such serious faults in method and execution and is so incomplete [...] cannot be very good as a text-book».

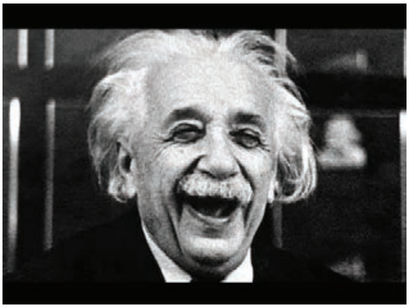


Fig. 26 - Albert Einstein (1879-1955).

geometria non euclidea alla geometria proiettiva.

Ancora più credibilità acquistarono le nuove geometrie con il loro utilizzo nella fisica moderna. Albert Einstein dovette servirsi della geometria non euclidea di Riemann nella sua teoria della relatività generale, dove la presenza di grandi masse deforma lo spazio-tempo incurvandolo localmente. Un'idea grossolana di questo fenomeno si può avere immaginando lo spazio-tempo come un telo inizialmente teso e piano e di porre sopra di esso un oggetto molto pesante: la sua superficie si deforma localmente, per effetto della massa dell'oggetto, richiamando verso di sé gli oggetti disposti nelle sue vicinanze. Una maniera, questa, molto semplificata per spiegare il funzionamento della gravitazione universale secondo Einstein: non più dovuta alla misteriosa presenza di una forza a distanza, come Newton postulava (senza però crederci veramente nemmeno lui ...), bensì dovuta semplicemente alla deformazione dello spazio-tempo nel quale sono immersi tutti i corpi. La geometria ellittica si prestava alla descrizione geometrica delle deformazioni "locali" dello spazio-tempo prodotte dalle masse.

Da allora le nuove geometrie sono divenute oggetto di numerosi studi e feconde applicazioni, entrando, a pari merito della geometria euclidea, nel mondo matematico ufficiale.

Inoltre l'avere scoperto che la geometria di Riemann può essere intesa come la geometria euclidea sulla sfera - non appena si mutino i modelli di punto, retta e piano - le ha dato una consistenza fisica maggiormente comprensibile da un largo pubblico.

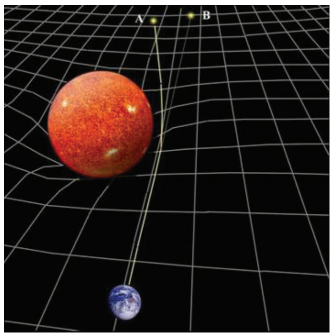


Fig. 27 - Le masse deformano lo spazio-tempo.

Anche la geometria iperbolica sembra trovare una sua rispondenza alla realtà fisica nella percezione visiva, che sarebbe non euclidea. Il matematico e fisico Rudolf Karl Lüneburg (1903-1949) ha compiuto studi sulla geometria dello spazio visuale, concludendo che esso «ha una funzione metrica non euclidea determinata in modo univoco, ovvero una funzione di distanza psicometrica, i cui parametri numerici dipendono dal singolo osservatore [...]. Tuttavia la sua forma generale è invariante; è la metrica della geometria iperbolica tridimensionale ».[62]

9 - Geometria e fisica

La geometria può essere derivata da diversi livelli della realtà fisica? Questa domanda merita qualche osservazione sul modo in cui "probabilmente" le idee primitive euclidee di punto, retta e piano sono state tratte da ciò che abbiamo chiamato in maniera generica "realtà fisica".

Teniamo presente che lo scopo originario della geometria era di descrivere quel particolare aspetto dei fenomeni "fisici", che hanno luogo sulla Terra, legato alle forme e alla loro misura, detto pertanto "geo-metrico". Come è ben noto, infatti, il termine geometria è una parola composta che significa letteralmente "misura della Terra" (dal greco *gè* = terra e *mètron* = misura).

Qualcuno ha asserito che l'idea del piano tramandata da Euclide sia dovuta al fatto ch'egli accolse nei suoi *Elementi* l'idea molto più antica della forma piatta del nostro pianeta e che, invece, se avesse considerato l'idea della sfericità, che era ormai affermata all'epoca in cui visse, l'idea di piano che ci avrebbe proposto sarebbe stata quella di una superficie sferica, ottenendo una maggiore aderenza alla realtà fisica a livello globale terrestre e sarebbe giunto a conclusioni simili a quelle della geometria non euclidea di Riemann. È vero che i suoi *Elementi* rappresentavano una *summa* della conoscenza matematica dai tempi più antichi fino alla sua epoca, e quindi è plausibile che siano state travasate in essi anche idee radicate in tempi molto più

62 Rudolf K. Luneburg, *The Metric of Binocular Visual Space*, in «Journal of the Optical Society of America», Philadelphia, vol. 440, n. 10, 1950, p. 642.

remoti, tuttavia appare molto improbabile che ciò sia avvenuto per la forma della Terra. La sua sfericità fu affermata, per la prima volta, dai pitagorici più di due secoli prima del tempo in cui visse Euclide. È poco credibile che dopo un intervallo di tempo di quest'ordine, in un'opera come gli *Elementi*, che aveva l'ambizione di costituire la perfezione e il massimo nella trattatistica matematica del tempo, sia stata accolta un'idea, peraltro d'importanza fondamentale, ormai superata da oltre due secoli. Inoltre, mentre il geocentrismo ebbe nell'antichità alterne vicende, non risulta che dai pitagorici in poi qualcuno abbia rimesso in discussione la sfericità della Terra.

Quello che invece sembra più verosimile é che Euclide abbia derivato le idee fondamentali della sua geometria da modelli concreti legati a un livello della realtà fisica di "dimensioni umane" o "domestiche", quello coinvolto nelle nostre esperienze di vita quotidiana.

Certamente, però, anche le geometrie non euclidee hanno poi trovato una loro realizzazione fisica: quella ellittica nella sfera e nelle deformazioni locali dello spazio-tempo, quella iperbolica nella psudosfera e nella percezione visiva.

Ci si è allora chiesti: quale geometria segue l'universo nel suo insieme? Un criterio, per rispondere a questa domanda, che è apparso inizialmente più facilmente utilizzabile, è stato quello di misurare gli angoli interni di un grande triangolo e di calcolarne la somma: se essa sarà pari a due retti la geometria dell'universo sarà euclidea, se sarà inferiore a due retti sarà iperbolica e infine se sarà maggiore di due retti sarà ellittica. In misure di questo tipo si scelgono triangoli molto grandi, perché più grande è il triangolo maggiore è l'eventuale scostamento della somma degli angoli interni dai due retti e quindi più affidabili sono le conclusioni su quale geometria governi l'universo. Nel 1818, Gauss accettò la direzione di una rilevazione topografica del regno di Hannover. Tale occasione gli offrì la possibilità di avere una conferma sperimentale se lo spazio attorno a noi segue o no la geometria euclidea. Gauss, compì con il teodolite misurazioni degli angoli interni di un grande triangolo, formato dalle cime delle colline di Brocken, Hohehagen e Inselberg. I risultati delle sue misure mostrarono in effetti uno scarto in difetto da due retti, ma esso era compreso nell'errore, inevitabile, di misurazione sperimentale e, pertanto, la verifica che Gauss si attendeva non poteva essere valida per decidere sulla delicata questione. Tutt'oggi nelle misure effettuate su grandi triangoli astronomici, la somma degli angoli interni, pur non essendo uguale a 180°, se ne discosta per meno dell'errore di misura, che è legato all'utilizzo degli strumenti di misura attuali. Pertanto, il criterio della somma degli angoli interni di un triangolo non è sperimentalmente risolutivo.

Un altro criterio per stabilire quale geometria segua l'universo è quello della rettilineità dei raggi di luce. Esso, però, è strettamente legato al precedente, in quanto la misura degli angoli di un triangolo sia "terrestre" sia "cosmico" avviene con mezzi ottici che "postulano" la rettilineità dei raggi di luce.

Spesso, erroneamente, si afferma che Einstein ha scoperto che la geometria dello spazio è non euclidea in quanto i raggi di luce in presenza di masse si incurvano. La teoria della relatività generale prevede, in effetti, che i raggi di luce si incurvino in presenza di masse e il 29 maggio 1919 sir Arthur Eddington (1882-1944), durante un ecclissi totale di Sole, verificò sperimentalmente la deviazione della luce, proveniente da una stella, in prossimità del Sole così come prevista da Einstein.

Tale fenomeno, tuttavia, si presta a due interpretazioni equivalenti, come è stato posto in evidenza da Hans Reichenbach (1891-1953) in varie sue opere (per esempio in *La nascita della filosofia scientifica,*1951).[63] Secondo la prima, si postula che l'universo segua la geometria euclidea e pertanto i dati osservativi di sir Eddington dimostrerebbero che esiste un fenomeno fisico (la massa) in grado di incurvare i raggi di luce. Nella seconda interpretazione, invece, si postula che i raggi di luce si propaghino in linea retta e allora i dati osservativi non dimostrerebbero altro che la linea retta non è quella euclidea ma quella della geometria ellittica. Einstein ha pertanto soltanto scoperto che adottando quest'ultimo punto di vista, la teoria fisica globale è descrivibile con leggi geometriche e fisiche molto più semplici, ma avrebbe potuto continuare a usare la geometria euclidea, formulando però leggi fisiche più sofisticate. Si ripresenta la stessa

63 Cfr. Herbert Meschkowski, *Op. cit.*, p. 93.

situazione della descrizione geocentrica aristotelico-tolemaica e di quella copernicana eliocentrica (o meglio eliostatica): alla luce del relativismo del moto, esse sono concettualmente equivalenti e quindi entrambe parimenti "vere", ma la seconda consente una descrizione formale dei moti planetari più semplice di quella geocentrica e quindi più "comoda".

Oggi l'astrofisica, per verificare se l'universo segua globalmente l'una o l'altra geometria, fornisce strumenti di calcolo più sofisticati basati su misure della densità della massa-energia dell'universo. Con il suo principio cosmologico, Einstein ipotizzò un universo, a grande scala, omogeneo e isotropo: le sue proprietà fisiche non variano da punto a punto e al variare della direzione. In particolare, la relatività einsteiniana determina un valore critico d_c della densità della massa-energia:

$$d_c = (1{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-29} \ \frac{g}{cm^3}$$

che discrimina tre scenari possibili di universo:

1. se fosse $d < d_c$ l'espansione dell'universo proseguirebbe all'infinito. L'universo seguirebbe la geometria iperbolica;
2. se fosse $d = d_c$ l'espansione dell'universo rallenterebbe senza però mai terminare e sarebbe valida la geometria euclidea;
3. se fosse $d > d_c$ l'espansione dell'universo rallenterebbe fino a fermarsi per poi cedere il posto al fenomeno inverso di una contrazione (*big crunch*). L'universo seguirebbe la geometria ellittica.

Recentemente, l'astrofisico Paolo De Bernardis ha eseguito misure della densità della massa-energia dell'universo nell'ambito del progetto BOOMERanG, pervenendo alla conclusione che l'universo non è curvo ma piatto e che in esso vale "globalmente" la geometria euclidea:

> Questo risultato, grazie alla relatività generale, permette di stimare la densità media di massa-energia presente nell'universo. Infatti, schematizzando l'universo a grande scala come un fluido

omogeneo e isotropo (schematizzazione oggi suggerita anche dalle misure di struttura a grande scala monitorata dalla distribuzione delle galassie), sottoposto alla sola gravitazione, la relatività generale collega univocamente la curvatura dello spazio alla densità (uniforme) di massa-energia presente nel fluido. Esiste un solo valore della densità di massa-energia a cui corrisponde una geometria Euclidea dello spazio, con assenza di curvatura (è l'analogo tridimensionale di un piano). Per valori maggiori della densità di massa-energia lo spazio avrebbe curvatura positiva (sarebbe quindi l'analogo tridimensionale della superficie di una sfera), per valori minori avrebbe curvatura negativa (e sarebbe quindi l'analogo tridimensionale della superficie di una sella). Quando abbiamo calcolato il valore dell'angolo sotteso da un orizzonte causale lo abbiamo fatto assumendo una geometria Euclidea dello spazio, senza curvatura, in cui i raggi di luce si propagano lungo linee rette. Ma la relatività generale ci dice anche che c'è una ben precisa densità di massa-energia nell'universo che produce tale geometria. Questa particolare densità è pari a $3H_0^2$ / $8\pi G = 10^{-29}$ g/cm^3. Per tutti gli altri valori della densità di massa-energia lo spazio è curvo (positivamente o negativamente) e i raggi di luce si propagano lungo linee curve (le geodetiche dello spazio curvo). In tal caso l'angolo sotteso degli orizzonti causali sarebbe maggiore di 1 grado per spazio a curvatura positiva (densità di massa-energia maggiore della densità critica), o minore di 1 grado per spazio a curvatura negativa (densità di massa-energia minore della densità critica). Quindi se le misure di BOOMERanG (confermate da molti esperimenti successivi) indicano una dimensione delle macchie proprio di 1 grado, significa che l'universo ha una geometria Euclidea, lo spazio non è curvo, e quindi la densità di massa-energia dell'universo deve essere proprio quella critica. Le misure più recenti di questo tipo indicano una densità di massa-energia dell'universo pari a quella critica con un errore inferiore all'1%.[64]

Euclide, allora, non aveva sbagliato!

… se Dio esiste, e se in realtà ha creato la terra, l'ha creata, come ci è perfettamente noto, secondo la geometria euclidea, e ha creato lo spirito umano dandogli soltanto la nozione delle tre dimensioni dello spazio. Nondimeno si sono trovati e si trovano tuttora geometri e filosofi, anche fra i più illustri, i quali dubitano che tutto l'universo

64 Paolo De Bernardis, *L'Universo Primordiale: un laboratorio per la cosmologia e la fisica fondamentale*, Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Scienze Fisiche e Naturali 133° (2015), Vol. XXXIX, Parte II, Tomo I, pp. 94-95.

o, con espressione anche più larga, tutto l'esistente sia stato creato soltanto in conformità della geometria euclidea, e osano perfino supporre che due linee parallele, le quali, secondo Euclide, non possono assolutamente incontrarsi sulla terra, possano invece incontrarsi in qualche punto dell'infinito. Confesso umilmente di non avere alcuna attitudine a risolvere tali problemi, io ho uno spirito euclideo, terrestre … sono tutti problemi assolutamente non adeguati a uno spirito creato con la sola nozione delle tre dimensioni

Dostoevskij, *I fratelli Karamazov* –1880

10 - La matematica come sistema ipotetico-deduttivo

Riflettendo sulla struttura logica della geometria, ci si convince facilmente che essa può essere intesa come l'insieme α dei postulati e dei teoremi $\Sigma(\alpha)$ da essi derivati in base a determinate regole logiche. Poiché i postulati sono le premesse o ipotesi e i teoremi sono tutto ciò che da esse si può dedurre, si può parlare più sinteticamente di sistema ipotetico-deduttivo $\Sigma(\alpha)$ per la geometria costruita sopra i postulati α. Questa struttura è comune a qualunque branca della matematica (geometria, aritmetica, algebra, ecc.) ciascuna delle quali, quindi, può essere considerata un sistema ipotetico-deduttivo, come vedremo più avanti parlando della scuola matematica assiomatico-formalista.

Per adempiere correttamente alla loro funzione di proposizioni "base" su cui poter costruire l'intero sistema ipotetico-deduttivo $\Sigma(\alpha)$, i postulati devono possedere tre requisiti:[65] indipendenza, coerenza,[66] completezza. Di questi requisiti l'unico irrinunciabile è la coerenza: se i postulati fossero contradditori anche i teoremi derivati lo sarebbero e quindi l'intero sistema ipotetico-deduttivo sarebbe invalidato logicamente.

Precedentemente si è mostrato che la dimostrazione dell'indipen-

65 Queste caratteristiche furono poste in evidenza da David Hilbert. È qui appena il caso di menzionare un'altra prprietà spesso associata a sistemi completi e non-contradditori: la categoricità (cfr. Edward Russell Stabler, *Il pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1970, pp. 226-232).

66 Detta anche: consistenza o compatibilità o non-contradditorietà.

denza del 5° postulato dai rimanenti postulati euclidei è ricondotta alla dimostrazione della validità logica delle geometrie non euclidee costruite sui postulati euclidei sostituendo il 5° postulato con una delle sue due negazioni.

Ma come dimostrare che la geometria non euclidea è priva di contraddizioni? Si è anche accennato che la via corretta è quella di trovare modelli euclidei della geometria non euclidea, perché in tal caso la validità di quest'ultima è ricondotta a quella della geometria euclidea, ritenuta valida in assoluto in quanto inerente alla realtà fisica. Vediamo ora per quale motivo la validità di una geometria (più in generale di un sistema ipotetico-deduttivo) non può essere dimostrata rimanendo al suo interno.

Saccheri, come già detto, non trovò in realtà alcuna contraddizione nelle due geometrie dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto che aveva costruito sui postulati euclidei sostituendo al 5° le sue due possibili negazioni. Tuttavia, non si poteva concludere che effettivamente le due geometrie non euclidee da lui costruite fossero certamente non contraddittorie. La stessa osservazione vale per le geometrie sviluppate poi da Lobacevskij, Bolyai e Riemann. L'unica cosa che era corretto dire è che fino al punto di sviluppo raggiunto, le nuove geometrie non presentavano contraddizioni.

Ma allora come procedere? Dimostrare che un sistema ipotetico-deduttivo è coerente significa dimostrare la compatibilità dei suoi postulati. Infatti se i postulati sono coerenti, anche le proposizioni da essi derivate lo sono, mentre se i postulati sono contraddittori anche fra le proposizioni derivate si troveranno delle contraddizioni.

Con un semplice ragionamento logico si può dimostrare che la compatibilità di un insieme di postulati può essere dimostrata soltanto fuori del sistema ipotetico-deduttivo su di esso costruito:

> Supponiamo di avere dimostrato che:
>
> (1) i postulati α sono fra loro compatibili.
>
> Due casi si presentano possibili:
> a) la proposizione (1) appartiene al sistema $\Sigma(\alpha)$;
> b) la (1) è fuori di $\Sigma(\alpha)$.

> Ebbene, nell'ipotesi a) la (1) non è attendibile: infatti ogni affermazione contenuta in Σ(α) ha la stesa validità (logica) dei postulati α, ed è quindi accettabile se lo sono questi. Allora la (1) dice che i postulati α risultano compatibili quando sono tali! Cioè: una tautologia priva di contenuto.
>
> Questa conclusione può essere illustrata con altre parole. Nel sistema Σ(α) si trova la proposizioe (1). Si presentano due possibilità: i postulati α sono fra loro compatibili e la (1) ne dà conferma. Oppure quei postulati sono incompatibili, cioè Σ(α) risulta contraddittorio: allora la (1) non fa altro che provare l'esistenza di una contraddizione in Σ(α), e quindi conferma la non compatibilità dei postulati α. Pertanto, nell'una e nell'altra delle due alternative, la (1) non conduce all'acquisizione di una nuova circostanza, ma soltanto alla convalida di un fatto preesistente. Se questo non è altrimenti noto, la proposizione (1) non dice e non dimostra nulla.[67]

Dunque, la proposizione (1) deve essere fuori di Σ(α).

Concettualmente la strada da seguire è semplice: si interpretano i postulati α nell'ambito di un altro sistema ipotetico-deduttivo Σ(β), nel senso che si cercano in quest'ultimo degli enti (astratti) che soddisfano i postulati α: essi costituiscono un modello astratto, nel sistema Σ(β), del sistema ipotetico-deduttivo Σ(α).

Nel caso della geometria, tali enti sono figure geometriche della geometria Σ(β). Allora, se il sistema Σ(β) è logicamente valido anche i postulati α lo sono. Dunque, la validità logica di Σ(α) è "relativa" a quella di Σ(β). A questo punto, però, si presenta per Σ(β) lo stesso problema della validità logica posto per Σ(α). Per provare la compatibilità dei postulati β occorre trovare una interpretazione di questi nell'ambito di un altro sistema Σ(γ), considerato valido logicamente. Ma la validità logica di quest'ultimo sarà accertata ripetendo per esso la stessa procedura seguita per i precedenti sistemi Σ(α) e Σ(β), cioè sarà derivata da un altro sistema Σ(δ) e cosi via. Questo "così via", però, non può ripetersi all'infinito. Insomma, per accertare la validità logica di un sistema ipotetico-deduttivo si ripresenta lo stesso meccanismo di "scarica barile" visto per le definizioni e le dimostrazioni, comune a qualunque situazione in cui qualcosa viene derivata da qualcos'altro e il processo risulterebbe di conseguenza *ad infinitum*.

67 Luigi Campedelli, *Op. cit.*, p. 265.

In tali casi occorre, dunque, fissare in qualche modo dei punti di partenza: per le definizioni sono le idee primitive (o enti fondamentali), per le dimostrazioni sono le proposizioni primitive (o postulati). Per la validità logica (o compatibilità) dei sistemi ipotetico-deduttivi il punto di partenza è invece un sistema ipotetico-deduttivo fondamentale Σ*, la cui validità logica viene ammessa senza derivarla da un altro sistema.

Come scegliere il sistema ipotetico-deduttivo fondamentale?

Poiché i concetti connessi con i numeri interi appaiono nell'uomo innati, spontanei, privi di alcun dubbio, congeniali alla sua ragione,[68] si è convenuto di assumere come fondamentale il sistema ipotetico-deduttivo fondato sul concetto di numero intero, ovvero l'aritmetica. La formulazione più nota di tale sistema è quella di Giuseppe Peano (1858-1932), il quale assunse come idee primitive di Σ* le idee di 0, numero, successore e come proposizioni primitive: 0 è un numero; il successore di ogni numero è un numero; due numeri non possono avere lo stesso successore; 0 non è il successore di alcun numero; ogni proprietà dello 0, come anche del successore di ogni numero che abbia quella prorietà, è di tutti i numeri (principo di induzione matematica).

Nel caso della geometria, anziché considerare come fondamentale il sistema ipotetico-deduttivo dei numeri interi, si può considerare quello della geometria euclidea, in quanto i suoi postulati sono traduzioni di proprietà fisiche e quindi certamente compatibili, in quanto il mondo della realtà fisica non può essere affetto da contraddizioni.

Con tale scelta, per dimostrare la validità logica delle geometrie non euclidee, e quindi anche l'indipendenza del 5° postulato, occorre derivare la loro validità logica da quella della geometria euclidea secondo il metodo sopra indicato dei modelli astratti, che conviene ora esaminare più in dettaglio.

Si è precedentemente detto che gli enti fondamentali della geometria euclidea (punto, retta, piano) sono definiti implicitamente dai postulati, i quali esprimono relazioni fra di essi lasciandone indefinita la natura. Così, per esempio, il primo postulato euclideo

68 «Iddio creò i numeri interi , il resto è opera dell'uomo», diceva il matematico e logico Leopold Kronecker.

«da ogni punto del piano ad ogni altro punto è possibile condurre una linea retta»[69] stabilisce una relazione di appartenenza reciproca fra due punti del piano e la retta passante per essi, ma non definisce cos'è in sé né la retta né il punto. Da questa relazione che li lega fra loro siamo soltanto autorizzati a pensare a due "oggetti" di natura indefinita, e quindi astratti, chiamati punto e retta, tali da soddisfarla. Potremo quindi formarci diverse immagini mentali di punto, retta e piano che soddisfino gli stessi postulati euclidei: esse costituiscono altrettanti modelli astratti dei postulati euclidei.[70]

Queste "immagini mentali" possono essere derivate dalla realtà fisica, come nel caso della geometria euclidea, per la quale è noto che i modelli astratti di punto, retta e piano sono tratti da oggetti concreti, privandoli mentalmente di ogni carattere fisico.

Il segno lasciato su un foglio di carta da una matita ben appuntita è un modello concreto del punto, dal quale può derivarsi il modello astratto di punto privando quel segno di ogni dimensione e di ogni attributo materiale (colore, sostanza).

Un'esile cordicella ben tesa fra due chiodi può costituire un modello concreto di retta, dal quale può derivarsi il modello astratto eliminando, nella nostra mente, la sua dimensione trasversale, la sua consistenza fisica e immaginando di prolungarla indefinitamente dall'uno e dall'atro estremo.

In maniera analoga, la superficie ben levigata di un tavolo, prolungata idealmente all'infinito lungo ogni sua retta e privata della sua dimensione trasversale e della sua consistenza fisica, dà luogo al concetto astratto di piano euclideo.[71]

69 Occorrerebbe precisare "una sola linea retta", come sottintende Euclide.

70 Modelli isomorfi.

71 Nessuno sa, in realtà, a quali modelli concreti si sia riferito Euclide nella concezione delle idee fondamentali (punto, retta, piano) della sua geometria. Ogni illazione è quindi parimenti opinabile. Fra queste è particolarmente insolita l'ipotesi sostenuta dal matematico tedesco Hugo Dingler sulla genesi meccanica delle idee primitive della geometria euclidea. Per esempio il concetto di piano, secondo Dingler, Euclide lo avrebbe derivato dall'osservazione del taglio delle pietre per ottenere delle lastre "piane", che consiste nel far «strisciare l'una contro l'altra tre lastre grandi a piacere di materiale duro fino a che esse aderiscano completamente o che i due lati delle superfici che così hanno origine siano in ogni posto e globalmente congruenti e indistinguibili». (Herbert Meschkowski, *Op. cit*, p. 89.)

I modelli astratti di una geometria possono, però, anche essere derivati da enti astratti già presenti in un'altra geometria, come si è detto precedentemente. È questo il caso dei modelli euclidei delle geometrie non euclidee che hanno consentito di dimostrare la validità logica di queste equiparandola a quella della geometria euclidea, logicamente valida per assunzione.

Come già detto, il primo a trovare un modello euclideo della geometria iperbolica (la pseudosfera) è stato il matematico italiano Eugenio Beltrami nel 1868, al quale quindi spetta il riconoscimento di avere anche dimostrato l'indipendenza del 5° postulato di Euclide, ovvero la sua indimostrabilità, ponendo così definitivamente fine ai secolari infruttuosi tentativi di dimostrarlo.

11 - Dalla matematica alla filosofia matematica

«Poiché parecchie geometrie sono possibili, è proprio certo che la nostra è la vera?», diceva Henry Poincaré.[72]

La consapevolezza della possibilità di geometrie diverse da quella euclidea fu uno stimolo fondamentale per i matematici dei secoli XIX e XX ad approfondire il problema dei fondamenti della geometria e della matematica tutta.

Fino al secolo XIX i matematici erano stati impegnati soprattutto in nuove scoperte e generalmente poco si erano curati della perfetta correttezza logica dell'assetto della loro materia.

Come osserva Bertrand Russell ci sono due versi di percorrenza della matematica.[73] Il primo, che è quello più familiare a tutti, è costruttivo e si «sviluppa con una complessità gradualmente crescente; dai numeri interi alle frazioni, ai numeri reali, ai numeri complessi; dall'addizione e dalla moltiplicazione alla differenziazione ed all'integrazione, fino alla matematica superiore». Il secondo, invece, «procede per analisi ad una crescente astrazione e semplicità logica; invece di ricercare quel che può essere definito e dedotto dalle asser-

72 Henry Poincaré, *Op. cit.*, p. 57.

73 Bertrand Russell, *Introduzione alla filosofia matematica,* Roma, Newton Compton, 1970, pp. 17,18.

Fig. 28 - Henry Poincaré (1854-1912).

zioni iniziali, cerca i concetti ed i principi più generali, nei cui termini quello che era il punto di partenza può essere definito o dedotto». Il primo verso di percorrenza costituisce la matematica in senso stretto, mentre il secondo verso di percorrenza costituisce la filosofia matematica. È importante notare che gli enunciati coinvolti in questi due cammini opposti sono gli stessi mentre la «distinzione tra matematica e filosofia matematica dipende [soltanto] dall'interesse che informa la ricerca».

Verso la fine del secolo XIX e gli albori del secolo XX, i matematici furono particolarmente interessati a percorrere la matematica nel secondo verso, ovvero verso i suoi fondamenti, perché resi sensibili al problema della struttura logica delle varie branche della matematica proprio dal caso delle geometrie non euclidee e dalle numerose inesattezze e lacune logiche trovate negli *Elementi* di Euclide.

La preoccupazione fondamentale era di dimostrare l'assenza di contraddizioni all'interno di ogni ramo della matematica. Inoltre, se altre geometrie, fondate su assiomi diversi da quelli euclidei, si erano dimostrate possibili, prima soltanto logicamente e poi anche fisicamente, emergeva un problema nuovo rispetto al passato, quello di capire quale valore di verità dare agli assiomi, in altri termini il problema della validazione dei fondamenti della geometria e della matematica tutta.

Tali ricerche sui fondamenti della matematica produssero accese controversie fra i matematici, iniziate verso la fine del secolo XIX e culminate agli inizi del secolo XX, portando alla formazione di diverse correnti di pensiero, caratterizzate sostanzialmente dal diverso modo di affrontare il problema della validità dei principi e, di conseguenza, anche da un diverso modo di concepire il significato e l'insegnamento della matematica. Schematicamente, si possono oggi individuare cinque principali scuole di pensiero matematico: l'intuizionismo, il logicismo, l'assiomatismo, il formalismo e il positivismo logico o neo-positivismo. Quest'ultimo non riguarda esclusivamente la matematica, bensì in generale tutta la scienza.

Si tratta però di una semplice schematizzazione, poiché in realtà i matematici in genere aderiscono a tali indirizzi secondo varie sfumature. Per esempio, Henry Poincaré può essere considerato un intuizionista, per il valore da lui dato all'intuizione come strumento di conoscenza, ma anche un formalista, per il valore di semplici convenzioni da lui dato ai fondamenti della matematica:

> Gli assiomi geometrici non sono né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali: sono convenzioni. La nostra scelta fra tutte le convenzioni possibili è guidata da fatti sperimentali; ma essa rimane libera ed è limitata solo dalla necessità di evitare ogni contraddizione. In tal modo i postulati possono rimanere rigorosamente veri, anche quando le leggi sperimentali, che ne hanno suggerita l'adozione, sono approssimative [...] Che si deve quindi pensare della questione circa la verità della geometria? Essa non ha alcun senso. Sarebbe come domandare se il sistema metrico sia vero e false le antiche misure; se siano vere le coordinate cartesiane e false quelle polari. Una geometria non può essere più vera di un'altra; essa può essere soltanto più comoda.[74]

Tuttavia, le recenti misure dell'astrofisico Paolo De Bernardis sembrano contraddire quest'ultima asserzione di Poincaré: la geometria euclidea non sembra essere la più comoda ma quella in accordo con la fisica dell'universo nella sua globalità.

Sempre nello spirito di una spinta schematizzazione, a fini puramente esemplificativi e chiarificatori, si può tentare di identificare gli intuizionisti con i matematici applicati e i logicisti-formalisti con i matematici puri. È bene, però, rilevare che intuizionisti, assiomatisti, formalisti, logicisti e neo-positivisti riconoscono tutti la medesima struttura logica della matematica come sistema ipotetico-deduttivo. La diversità fra i cinque indirizzi riguarda soltanto il modo di affrontare il problema della validità degli assiomi, con conseguenti diverse valutazioni sul significato della geometria e di tutta la matematica.

---

74 Henry Poincaré, *Op. cit.*, pp. 58, 59.

11.1 - L'intuizionismo

Per un matematico intuizionista, la geometria è la forma necessaria a priori della percezione della realtà esterna e i «concetti matematici hanno, oppure dovrebbero avere, un significato psicologico di per se stessi, senza necessità di mediazione da parte dell'astrazione e del simbolismo».[75]

In altri termini, i principi della geometria devono essere ricercati esclusivamente nel mondo fisico, perché la geometria ha significato soltanto come chiave di lettura della natura, per poter leggere, come diceva Galileo, nel «…grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi (io dico l'universo)» che «non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscere i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi e altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola: senza questi è un aggirarsi vanamente per un labirinto».[76]

In tal senso, la geometria può essere considerata un particolare capitolo della fisica. Si può senz'altro affermare che la stragrande maggioranza dei matematici del passato è appartenuta a tale indirizzo di pensiero, che in Archimede ha trovato probabilmente il massimo esponente fin dall'antichità classica. La scoperta, avvenuta agli inizi del secolo XX , di una sua opera ritenuta perduta, *Il Metodo*, rivela esplicitamente come Archimede giungeva alle sue principali scoperte geometriche attraverso l'applicazione di metodi meccanici e quindi sperimentali.

Ovviamente, prima della nascita delle geometrie non euclidee e delle conseguenti dispute sui fondamenti della matematica, tutti i matematici erano, più o meno consapevolmente, intuizionisti.

I primi "cedimenti" riguardo a questo punto di vista risalgono al secolo XIX (G. Boole, B. Peirce, J. W. R. Dedekind, G. Cantor). In realtà, soltanto agli inizi del secolo XX, in contrapposizione alle altre vedute sul significato delle matematiche, prende coscienza una vera e

75 Edward Stabler, *Op. cit.*, p. 341.

76 Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, Capitolo VI, Prima Giornata.

propria scuola intuizionista per opera di L.E.J. Brouwer (1881-1966), di cui Hermann Weyl (1885-1955) è stato il più autorevole seguace.

11.2 - Il logicismo

Il precursore del logicismo fu senz'altro George Boole (1815-1864), che nel 1854, con la sua opera *Investigation of the Laws of Thought* (*Analisi delle leggi del pensiero*), gettò le basi della logica formale, e per tale suo contributo è stato poi considerato da Bertrand Russell l'inventore della matematica pura.

Fu, però, Friedric Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), nelle sue opere *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'aritmetica*, 1884) e *Die Grundgesetze der Arithmetik* (*Le leggi fondamentali dell'aritmetica* vol. I, 1893 e vol. II, 1903), che tentò per la prima volta di derivare tutta l'aritmetica dalla logica. L'opera di Frege rimase pressocchè ignorata fin quando Bertrand Russell non la riscoprì agli inizi del secolo XX, divulgandola negli ambienti scientifici del tempo. Per tali motivi, Frege può essere considerato il fondatore della scuola logicista, che ebbe poi in Alfred North Whitehead (1861-1947) e Bertrand Russell i suoi maggiori esponenti.

Per i logicisti, la geometria, al pari di qualunque altro ramo della matematica, è un'espressione dei meccanismi logici che caratterizzano il pensiero dell'uomo e, pertanto, i suoi principi vanno ricercati esclusivamente nella logica:

> Tutta la matematica pura (aritmetica, analisi, geometria) è costruita mediante varie combinazioni delle idee iniziali della logica, e i suoi enunciati sono dedotti dagli assiomi generali della logica, come il sillogismo e le altre regole deduttive.[77]

In tale ottica, logica e matematica sono sviluppi successivi di un'unica disciplina, al punto da poter affermare, con Russell, che «la logica è la gioventù della matematica, e la matematica è la maturità

77 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, op. cit., p. 72.

della logica».[78]

Naturalmente, non tutti sono d'accordo con tali vedute. Charles Sanders Peirce (1839-1914), figlio di Benjamin, per esempio, sosteneva che matematica e logica sono due discipline distinte, poiché «la matematica è puramente ipotetica: essa presenta soltanto proposizioni condizionali. La logica, al contrario, è categorica nelle sue asserzioni».[79]

11.3 - L'assiomatismo

L'aspirazione a stabilire una sistemazione rigorosamente logica della matematica fu una conseguenza sia della scoperta delle geometrie non euclidee sia dell'indirizzo formale iniziato da Boole. Essa raggiunse l'apice negli anni a cavallo dei secoli XIX e XX.

Le geometrie non euclidee e i lavori di Benjamin Peirce sulla costruzione di ben 162 algebre diverse avevano posto chiaramente in luce la possibilità di costruire "matematiche differenti"e altrettanto valide dal punto di vista logico.

Se prima di tali eventi i matematici avevano indirizzato i loro sforzi creativi unicamente verso i contenuti della loro disciplina, sul finire del secolo XIX e agli inizi del successivo, invece, diventò in loro predominante l'attenzione verso gli aspetti logici. Essi volevano essere sicuri della non contraddittorietà della matematica e cercarono di riorganizzarne i contenuti, in modo che fosse presentabile come un sistema logico perfetto.

Da queste ambizioni nasce l'assiomatismo, il cui obiettivo principale è ridurre tutta la matematica al minimo numero di concetti indefiniti e di proposizioni indimostrate.

A tale scopo, alcuni eminenti matematici sottoposero ad approfondite analisi la struttura logica dei vari rami della matematica, indagarono sulla compatibilità degli assiomi (studiando i metodi per dimostrare che non vi sia contraddizione fra gli assiomi), sulla loro

78 Bertrand Russell, capitolo *Matematica e logica*, in *Introduzione alla filosofia matematica,* op. cit., p. 227.

79 Carl B, Boyer, *Op. cit.*, p. 675.

indipendenza (cercando di appurare che nessun assioma sia deducibile dagli altri), sulla loro completezza (cioè che nessun altro postulato occorra per dimostrare i teoremi di un certo ramo della matematica).

Fig. 29 - Giuseppe Peano (1858,1932).

Il grande matematico italiano Giuseppe Peano, nei suoi *Arithmetices principia nova metodo exposita* del 1889, realizzò la prima sistemazione assiomatica dell'intera matematica (o quasi), ottenendo l'eclatante risultato di ridurre tutta l'analisi e l'aritmetica al sistema dei numeri naturali, e di ridurre a sua volta quest'ultimo a tre idee primitive e cinque assiomi, di cui si è già detto (par. 10). Qualche anno dopo, dal 1894 al 1908, con il suo celebre *Formulario Matematico*, espose la sua sistemazione assiomatica della matematica in maniera rigorosamente formale, senza usare una sola parola del linguaggio ordinario, bensì utilizzando esclusivamente un linguaggio artificiale da lui inventato, tutt'oggi largamente seguito, costituito dai simboli introdotti come concetti indefiniti e da quelli da essi derivati. L'opera di Peano e dei suoi allievi, sotto certi aspetti, ha costituito il massimo della perfezione logica ed ha avuto un influsso notevole negli ambienti scientifici di tutto il mondo. Russell lo definì «il grande maestro nell'arte del ragionamento formale, tra gli uomini dei nostri tempi».[80]

Nel 1899 David Hilbert nei suoi *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti della geometria*) presentò la prima e più celebre sistemazione assiomatica della geometria euclidea, derivando questa da cinque idee primitive e ventuno assiomi. Un'altra impostazione assiomatica della geometria degli *Elementi* di Euclide fu successivamente realizzata dal matematico americano Oswald Veblen, colmando così le lacune logiche degli *Elementi* euclidei.

80 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, op. cit., p. 74.

11.4 - Il formalismo

Il formalismo è una diretta conseguenza dell'assiomatismo e spesso i nomi dei due indirizzi si usano come sinonimi. L'assiomatismo aveva mostrato che è possibile dare a tutta la matematica l'impostazione di un sistema logico derivato formalmente da un ristretto insieme di concetti primitivi e di assiomi, ricorrendo a un linguaggio puramente formale e rigorosamente corretto dal punto di vista logico, vale a dire esente dai circoli viziosi che caratterizzano il linguaggio ordinario, che usa termini non consequenzialmente definiti in successione, ma che si rimandano l'uno all'altro reciprocamente. Secondo il formalismo, la geometria, come ogni altro ramo della matematica, è una costruzione di puro pensiero. A tale convinzione si arrivò in seguito al successo degli importanti esempi di formalizzazione dell'algebra, iniziati da Boole e proseguiti da Benjamin Peirce, e dell'opera di assiomatizzazione della matematica di Peano, Hilbert e altri ancora. Benjamin Peirce nel 1864, nella memoria *Linear Associative Algebra* presentata all'*American Association for the Advancement of Science*, aveva mostrato che, partendo da postulati diversi, era possibile costruire 162 algebre differenti. I sistemi assiomatici realizzati da Peano, Hilbert, Veblen, A.V. Huntington e la riflessione sull'assetto logico della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee mostravano che per la costruzione di una qualunque branca della matematica, in definitiva, è necessario e sufficiente iniziare da un insieme α di assiomi che soddisfino le tre condizioni richieste da Hilbert: coerenza, indipendenza e completezza.

Precedentemente abbiamo utilizzato il termine "non contraddittorio" appellandoci al suo significato intuitivo che ognuno di noi ha. Ora possiamo dare la seguente definizione: un insieme di postulati è non contraddittorio se non è contraddittorio; e un insieme di postulati è contraddittorio se, qualunque sia l'interpretazione dei concetti primitivi cui i postulati si riferiscono, per deduzione logica si ottengono proposizioni del tipo "p è vera e p è falsa", caratterizzate, cioè, contemporaneamente da entrambi i valori vero e falso.

Un insieme di postulati è indipendente se ciascuno di essi è indipendente dai rimanenti, vale a dire se né ciascun postulato stesso né la sua negazione possono essere dedotti logicamente dai rimanenti. La presenza, per esempio, di due postulati non indipendenti può portare a due situazioni: i due postulati *p* e *q* sono interdeducibili o equivalenti; i due postulati *p* e *q* sono l'uno deducibile dall'altro, ma non viceversa.

Nel primo caso, essendo *p* deducibile da *q* e, viceversa, *q* deducibile da *p*, *p* e *q* sono forme logicamente equivalenti, vale a dire *p* e *q* formalmente sono proposizioni differenti, ma hanno lo stesso contenuto informativo e quindi costituiscono una ridondanza, che dal punto di vista didattico può essere utile, ma dal punto di vista logico è inutile e può essere fuorviante, se non si ha piena coscienza della equivalenza logica di *p* e *q*. Quest'ultima circostanza, come abbiamo visto, è stata la causa degli innumerevoli infruttuosi tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele di Euclide.

Nel secondo caso, invece, poiché *p* è deducibile da *q* ma non viceversa, si dice che *q* è più forte di *p*, ovvero *p* è un teorema, mentre *q* è un vero postulato.

Concludendo, la presenza sia di postulati equivalenti sia di postulati uno più forte dell'altro non inficia l'intera costruzione logica che è sviluppata sull'insieme di postulati, ma porta semplicemente a un sistema logicamente sovrabbondante.

Infine, un insieme di postulati si dice completo se è impossibile formulare un qualsiasi altro postulato, riferentesi agli stessi concetti indefiniti, indipendente dagli altri postulati. Insomma, la completezza assicura che effettivamente si siano considerate tutte le proposizioni primitive necessarie per la derivazione dei teoremi, evitando così l'errore che commise Euclide nell'esporre teoremi che in realtà presupponevano postulati da lui non enunciati (i famosi postulati inespressi di Euclide).

Come abbiamo già visto, il sistema di proposizioni derivate dai postulati α con la deduzione logica costituisce il sistema ipotetico-deduttivo Σ (α) costruito sopra gli assiomi α. Tale sistema - dice Hilbert - si chiama "geometria", e precisamente la geometria relativa agli assiomi α, se i nomi dati agli enti primitivi sono "punto, retta, piano". Non si cerca alcun riferimento reale per le idee primitive, che sono considerate puri simboli legati dagli assiomi. Il formalismo costituisce, dunque, un punto di vista notevolmente astratto e lontano dalle nostre concezioni correnti e dallo stesso originario significato della parola geometria, intesa come scienza della "misura della Terra". È la matematica pura.

La concezione puramente formale della matematica capovolge quello che era stato il punto di vista affermato da Kant nella *Critica della ragion pura*: «Ogni conoscenza umana parte da intuizioni, procede attraverso concetti, e culmina in idee». Infatti, secondo l'impostazione formale, gli assiomi sono pure ipotesi, senza nessun necessario riferimento intuitivo, ed hanno unicamente la funzione di fornire la base su cui verrà costruito il sistema di proposizioni e definizioni, successivamente dedotte per via logica, che costituisce una branca della matematica (aritmetica, geometria, algebra, ecc.).

Pertanto, il concetto di "vero", secondo i formalisti, non ha più un significato assoluto, riferito al mondo fenomenologico, ma soltanto relativo al sistema ipotetico-deduttivo cui si riferisce: una proposizione (derivata o primitiva) è vera soltanto se all'interno del sistema ipotetico-deduttivo Σ (α), di cui fa parte, non contraddice con le altre dello stesso sistema.

I formalisti avvalorano il loro punto di vista, contestando agli intuizionisti l'impossibilità di stabilire la "verità" degli assiomi così come questi ultimi la intendono, poiché i metodi sperimentali sono sempre approssimativi e affetti da errori di misura. Dice Russell

> Se gli assiomi di Euclide siano veri, è una domanda alla quale il matematico puro è indifferente; e, per di più, è una domanda alla quale è impossibile, da un punto di vista teorico, dare con certezza una risposta affermativa. Si potrebbe forse dimostrare, mediante misure molto accurate, che gli assiomi di Euclide sono falsi; ma nessuna misura potrebbe mai garantirci (a causa degli errori di osservazione) che sono esattamente veri. Quindi il geometra lascia decidere all'uomo di scienza, meglio che può, quali assiomi siano più vicini alla realtà nel mondo reale. Il geometra prende una serie di assiomi che gli sembrano interessanti, e ne deduce le conseguenze.[81]

Dunque, nella pratica, la scelta degli assiomi non é fatta senza

81 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, op. cit., p. 88.

alcuna ragione oculata, semplicemente nel rispetto della loro indipendenza e compatibilità:

> Gli enti matematici vengono presentati dai matematici come strutture puramente formali. In verità (e qui è l'indagine storico-genetica che ci sorregge!) la matematica non si occupa di sistemi formali qualunque (arbitrari) pur che coerenti; la matematica si occupa di quei sistemi formali che traducono, in termini di pura struttura, parecchi sistemi concreti (concreti, almeno, rispetto alla nuova formalizzazione; l'astrazione conosce diversi gradi, astratto e concreto sono sempre dei relativi, mai degli assoluti). Lo scopo fondamentale è quello di lavorare in modo semplice e sintetico con deduzioni nelle quali entrano in gioco solo proprietà formali, in modo da potere tradurre un teorema (risultato della deduzione formale) in molti, a priori in infiniti, risultati relativi a tutti quei concreti che sono suscettibili della formalizzazione compiuta.[82]

11.5 - Il neo-positivismo

I neo-positivisti accolgono in pieno la concezione formalista della matematica e la estendono alla logica. Pertanto, non soltanto le idee e le proposizioni primitive della matematica sono simboli e regole arbitrari, ma anche i principi della logica possono essere scelti arbitrariamente dando luogo a "più logiche".

L'impulso a mettere in discussione l'esistenza di un solo tipo di logica, quella classica aristotelica a due valori (vero, falso), venne dagli intuizionisti, che contestavano ai logicisti e ai formalisti la validità del principio del terzo escluso (*tertium non datur*) della logica aristotelica, secondo il quale A è B o non-B, in altre parole una proposizione è vera o falsa, senza altre alternative. Tale principio, infatti, dava luogo a varie antinomie, nella sua applicazione sia a taluni insiemi sia a talune proposizioni. Vediamo alcuni esempi.

Il primo e più celebre è l'antinomia di Russell: sia C l'insieme che contiene tutte e soltanto le classi che non sono elementi di se stesse; C è un elemento di se stessa? Entrambe le risposte che si possono

82 Lucio Lombardo Radice, *Il punto di vista matematico,* in «Periodico di matematiche» n° 4-5 ottobre 1974.

dare con la logica a due valori danno luogo a contraddizioni. Infatti, se rispondiamo "C è elemento di se stessa", vuol dire che C è una delle sue classi, le quali, però, per definizione non sono elementi di se stesse: dunque C sarebbe contemporaneamente elemento di se stessa e non elemento di se stessa; se, d'altra parte, rispondiamo "C non è elemento di se stessa", allora C sarebbe una delle classi di C e quindi un elemento di se stessa: ancora una volta C sarebbe contemporaneamente elemento di se stessa e non elemento di se stessa.

Un'esemplificazione pittoresca dell'antinomia di Russell è formulabile con la seguente domanda: «Il barbiere che fa la barba a tutti e soltanto coloro che non si fanno la barba da soli, si fa la barba da solo?». Se il barbiere si fa la barba da solo, allora è egli stesso uno dei suoi clienti e quindi è uno che non si fa la barba da solo; se, al contrario, il barbiere non si fa la barba da solo, anche in questo caso è per definizione uno dei suoi clienti, e quindi fa la barba a se stesso. In entrambi i casi si dovrebbe concludere, contraddicendosi, che il barbiere si fa e non si fa la barba da solo.

Inoltre, un esempio di antinomia che deriva dall'applicazione del principio *tertium non datur* a certe proposizioni è noto fin dal VI sec. a. C. e lo si deve a Epimenide di Creta: «Io, Epimenide, sono Cretese e vi dico che tutti i Cretesi sono bugiardi». Se l'asserzione fosse vera, Epimenide, essendo cretese, sarebbe bugiardo, ma asserendo che tutti i cretesi sono bugiardi direbbe la verità e quindi non sarebbe bugiardo. Viceversa, se quell'asserzione fosse falsa, Epimenide dicendo anche lui una bugia direbbe il vero affermando che tutti i cretesi sono bugiardi. Ancora una volta una antinomia dunque.

Un'altra versione dello stesso tipo di proposizione è la seguente: «Questa asserzione è falsa». Infatti, se essa fosse falsa, allora sarebbe vera perché direbbe la verità; viceversa, se essa fosse vera, allora sarebbe falsa!

In tutti questi casi ci troviamo di fronte ad antinomie,[83] cioè a proposizioni caratterizzate dall'attribuzione contemporanea di vero e falso allo stesso soggetto.

Infine, esistono casi in cui, invece, non è possibile decidere se

83 Spesso erroneamente scambiate per paradossi.

qualcosa è vera o falsa. Un esempio molto semplice è il seguente: com'è possibile affermare se è vero o falso che nella rappresentazione decimale del numero irrazionale π compaia almeno una volta la successione di cifre 1,2,3,4,5,6,7,8,9, se il numero di cifre decimali di π è infinito, senza periodicità, e non è quindi possibile applicare nessun procedimento finito di indagine delle sue cifre? Tale affermazione, dunque, non è né vera né falsa, e il principio del terzo escluso non è applicabile.

Nel 1931 , il matematico e logico austriaco Kurt Gödel, prendendo in considerazione proprio l'antinomia di Epimenide, dimostrò che talune affermazioni sono vere se e solo se sono false, e quindi che il principio del terzo escluso non è sempre valido, esistendo situazioni in cui, invece, si è costretti ad accettare che un'affermazione non è né vera né falsa. Gödel dimostrò, con i suoi celebri teoremi sull'indecidibilità e sull'incompletezza, che entro ogni sistema rigidamente assiomatico e sufficientemente "forte", esiste almeno una proposizione per la quale non è possibile decidere se è vera o falsa e che un sistema non contraddittorio di assiomi deve essere necessariamente incompleto, e quindi che la prova della non contraddittorietà degli assiomi non può trovarsi all'interno del sistema ipotetico-deduttivo stesso, ma deve essere ricercata al di fuori di esso, come già abbiamo visto in altro modo (par. 10).

Deposta dal suo piedistallo la logica a due valori di Aristotile, sono stati elaborati sistemi di logica a più valori e sistemi di logica a valori della probabilità, in cui la verità di una proposizione può assumere vari valori, eventualmente infiniti, compresi fra i due estremi vero e falso, così come la probabilità di un evento può assumere gli infiniti valori compresi fra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo).

Il neo-positivismo o positivismo logico, dunque, sancisce la completa relatività della verità matematica: il concetto di vero è relativo non soltanto rispetto all'insieme di assiomi adottati ma anche rispetto al sistema di logica applicato.

12 - Conclusioni: da Platone a Parmenide?

Abbiamo visto che fino alla fine del XIX secolo i fondamenti della matematica avevano un carattere esclusivamente intuitivo, erano una interpretazione astratta della concreta realtà fisica.

Successivamente, con le geometrie non euclidee e con la nascita della filosofia matematica, si è affermato sempre più l'indirizzo formalistico e la matematica è divenuta una manipolazione logica di segni totalmente astratti, privi di significato in sé, tramite la quale si ottengono risultati dimostrativi anch'essi molto probabilmente privi di riscontro obiettivo. Un ideale, o una semplice esagerazione programmatica, che molto efficacemente Hilbert espresse nella sua prolusione all'Accademia prussiana delle scienze il 27 gennaio 1921:

> Pensiamo tre sistemi distinti di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema e indichiamoli con *A, B, C,* ... Chiamiamo rette gli oggetti del secondo sistema e indichiamoli con *a, b, c,* ... Chiamiamo piani gli oggetti del terzo sistema e indichiamoli con α, β, γ, ... I punti si chiamano anche gli elementi della geometria spaziale ; i punti e le rette si chiamano gli elementi della geometria piana; i punti, le rette e i piani si chiamano gli elementi della geometria spaziale, o dello spazio.

Per meglio far capire che nulla si può dire della natura in sé dei punti, delle rette e dei piani, Hilbert così si rivolgeva a colleghi matematici nella sala d'aspetto di una stazione berlinese:

> Si deve poter dire ogni volta, in luogo di "punti, rette, piani": "tavoli, sedie, boccali di birra".

Riferita alla matematica intesa da Hilbert, come sistema ipotetico-deduttivo puramente formale, è la celebre definizione di Bertrand Russell:

> Così la matematica può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero.[84]

84 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, op. cit., pp. 71-72. Ovviamente si tratta

Russell esprime l'indecidibilità sulla verità della base assiomatica della matematica. Gli enti primitivi o idee primitive non sono definiti nella loro natura, ma sono definiti soltanto implicitamente come quegli oggetti astratti che soddisfano le relazioni con gli altri enti primitivi imposte dagli assiomi: per due punti sul piano passa una e una sola retta, ecc. Questo assioma non dice nulla su cosa siano in sé il punto, la retta e il piano ma li relaziona fra loro. Tutti gli "oggetti" che soddisfino questa relazione possono arrogarsi il diritto di essere il punto, la retta e il piano di cui parla l'assioma. La natura del punto, della retta e del piano è dunque ignota: a questo si riferisce Russell dicendo che «non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando».

Gli assiomi, inoltre, sono proposizioni non più vere nel senso tradizionale perché inerenti alla realtà fisica, ma sono soltanto le premesse necessarie per sviluppare una teoria matematica: di essi si chiede di ammetterne la verità, sono quindi tutti postulati (dal latino *postulare* = chiedere). Il concetto di vero delle proposizioni derivate (teoremi) dagli assiomi e dalle precedenti nell'ordine dello sviluppo logico del sistema ipotetico-deduttivo è quindi "relativo" alla verità "ammessa" degli assiomi. Il nuovo concetto di "verità" nella matematica come sistema ipotetico-deduttivo formale si identifica quindi con la coerenza puramente sintattica. Il non sapere mai «se ciò che stiamo dicendo è vero » è dovuto alla rinuncia della coerenza fisica da parte degli assiomi. Ciò non impedisce però che la coerenza puramente sintattica o logica non possa essere anche semantica: in tal caso vi sarebbe una corrispondenza degli assiomi e teoremi con la realtà fisica, pur sempre idealizzata, e la matematica tornerebbe a essere "vera" nel senso tradizionale del termine. Questa è quella che Russell definisce matematica applicata. Il ruolo discriminatore

---

soltanto di una pseudo-definizione ovvero di un commento o giudizio sulla matematica. Russell definisce invece altrove la matematica pura: «La matematica pura è l'insieme di tutte le proposizioni della forma "p implica q", dove p e q sono proposizioni che contengono una o più variabili, né p né q contenendo costanti logiche. Le costanti logiche sono concetti che si possono definire in funzione di: implicazione, relazione di un termine ad una classe di cui è membro, nozione di tale che, nozione di relazione, ed ogni altro concetto implicito nella nozione generale delle proposizioni della forma precedente. Oltre a questi, la matematica usa un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di verità. (Bertrand Russell, *I principi della matematica*, Roma, Newton Compton "Grandi Tascabili Economici", 1997, p. 23).

della semantica nella matematica pura e applicata è chiaramente espresso da Russell:

> La matematica pura è interamente costituita da asserzioni per effetto delle quali, se un tale enunciato è vero per qualcosa, allora il tale altro enunciato è vero per quella cosa. È essenziale non discutere se il primo enunciato è realmente vero, e non indicare quale sia la cosa per la quale si suppone che sia vero. Entrambi questi punti attengono alla matematica applicata. Nella matematica pura, partiamo da certe regole deduttive, mediante le quali possiamo dedurre che se un enunciato è vero, allora lo è anche un altro enunciato. Queste regole deduttive costituiscono la maggior parte dei principi della logica formale Assumiamo dunque un'ipotesi che ci sembra attraente, e deduciamo le sue conseguenze. Se la nostra ipotesi riguarda qualcosa, e non una o più cose particolari, allora le nostre deduzioni fanno parte della matematica. Così la matematica può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero.[85]

Vero, nella matematica pura moderna, ha dunque soltanto un valore sintattico: coerenza all'interno di un sistema ipotetico-deduttivo.

Il valore semantico che ad esso si può aggiungere rientra, secondo Russell, nella matematica applicata e, secondo Hilbert, nella metamatematica. Il pensiero di Hilbert e Russell sulla matematica si può dunque sintetizzare in queste due identità:

matematica (Hilbert) = matematica pura (Russell)
metamatematica (Hilbert) = matematica applicata (Russell)

Da esse si trae una conclusione paradossale: una volta tanto il così sospettato e ostico prefisso "meta" si rivela foriero di una realtà tutt'altro che trascendente ma immanente alla realtà fenomenologica, in quanto la "metamatematica" di Hlbert si configura come la "matematica applicata" di Russell, ovvero la matematica galileiana, scritta nel «grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi (io dico l'universo)».[86]

85 Bertrand Russell, *La matematica e i metafisici*, op. cit., pp. 71-72.

86 Galilei Galilei, *Op. cit.*

Il rapporto fra matematica pura e matematica applicata potrebbe però essere visto sotto un'altra prospettiva. Se la matematica applicata è caratterizzata da un insieme di assiomi che oltre ad avere validità sintattica hanno anche un valore semantico, traendo significato dalla realtà fenomenica, allora potremmo concludere che la matematica applicata rientra come caso particolare nella matematica pura. In altri termini, la matematica pura, richiedendo l'attributo sintattico come "il solo necessario" (non escludendo però anche quello semantico), libera molte più possibilità, tante quanti sono i possibili insiemi di postulati costruiti senza il vincolo semantico. In tal caso i possibili sistemi ipotetico-deduttivi sarebbero molti, forse infiniti, di cui soltanto pochi però con un significato reale. In tal senso la matematica pura sarebbe una potentissima estensione di quella applicata. Possiamo allora affermare che ancora una volta il cammino della matematica ha seguito la direzione di una crescente generalizzazione, confermando la caratteristica cumulativa in generale di tutta la scienza ma in particolare della matematica. E a tal proposito ci vengono in soccorso le parole di Eugenio Beltrami:

> Nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità acquisite: esso può soltanto mutarne il posto e la ragione logica e crescerne o scemarne il pregio e l'uso. Nè la critica profonda dei principi può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie.[87]

La prospettiva della matematica pura come generalizzazione di quella applicata può rendere meno assurdo di quanto possa sembrare superficialmente l'antico "credo" filosofico parmenideo: "pensare è essere". I possibili sistemi ipotetico-deduttivi della matematica pura diventano "reali" se la loro base assiomatica trova una corrispondenza nella realtà fisica. Questo, come abbiamo visto, è avvenuto con le geometrie non euclidee di Riemann e di Lobacevskij-Bolyai allorché si è ampliato l'orizzonte della nostra attenzione dal ristretto mondo delle esperienze terrestri "locali" all'intera superficie terrestre e allo

87 Eugenio Beltrami, *Op. cit.*, nota a p. 284.

spazio cosmico oppure, più semplicemente, passando dalla considerazione di un sostrato piano per gli enti geometrici (geometria piana euclidea) a un sostrato curvo a curvatura positiva costante qual è la sfera (geometria ellittica) e ad uno a curvatura negativa costante qual è la pseudosfera (geometria iperbolica).

Sorge allora legittima la domanda: chi può escludere a priori che in qualche remota regione dell'immenso universo le premesse di un qualsiasi altro sistema ipotetico-deduttivo, che nella realtà da noi esperibile non trovano riscontro, acquistino invece valore reale? Non bisogna porre limiti spaziali e temporali al "pensare è essere" di Parmenide, che si riferiva all'Essere tutto. La realtà che noi consideriamo tale è soltanto quella da noi conosciuta, limitata sia per ragioni cognitive (si pensi alla materia e all'energia oscura di cui ancora ignoriamo la fisica) sia per il raggio d'azione dei nostri dati sensoriali confinati entro un orizzonte infinitesimo rispetto all'Universo.

Ma se così fosse, questa interpretazione eleatica della matematica sarebbe non altro che un platonismo universalizzato: non più un'unica verità matematica necessaria bensì una molteplicità di possibili verità matematiche, anche quelle non richiamate alla memoria dalla nostra esperienza terrena ma che sono tutte già nel Mondo delle idee, perché, per dirla con Parmenide, non si può pensare qualcosa che non è.

In fondo il «pensare è essere» di Parmenide è l'Iper-uranio di Platone, il quale, non dimentichiamolo, aveva incontrato da giovane, ad Elea, Parmenide già vecchio.

Le geometrie non euclidee e i sistemi formalizzati di Hilbert non hanno dunque demolito il platonismo, ma semplicemente lo hanno universalizzato riportandolo al suo vero padre: Parmenide.

Ringraziamenti

L'autore desidera esprimere la sua riconoscenza al prof. Ciro Ciliberto per la revisione del testo.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"