

Temperamenti musicali senza le UCAS

Parte I

Paolo Severino Manca*

DOI:10.30449/AS.v11n21.191

Ricevuto 26-06-2024 Approvato 8-07-2024 Pubblicato 30-07-2024



Sunto: *In ultima essenza un temperamento musicale è l'insieme delle regole con cui si intende costruire una successione di frequenze di suoni detti note: introdurre i principi che hanno ispirato, nei secoli, i vari temperamenti e istituire un confronto tra essi non dovrebbe dunque risultare particolarmente ostico. Purtroppo lo studio e la storia dei temperamenti musicali, una materia affascinante e multidisciplinare, vengono resi poco comprensibili dall'utilizzo di una terminologia infelicissima e dall'ignoranza di elementari nozioni matematiche. Scopo di queste pagine è quello di descrivere e valutare i più noti temperamenti adottati nella musica occidentale con una terminologia non equivoca e con l'utilizzo di poche nozioni di matematica elementare. Evidenziate le regole più condivise che presiedono alla costruzione di un temperamento, il testo si conclude fornendo alcune regole che permettono di costruire i vari temperamenti e magari nuovi "temperamenti personalizzati".*

Parole Chiave: Temperamenti musicali, temperamento pitagorico, temperamento mesotonico, temperamento zarliniano, temperamento equabile, suoni armonici, ottava, tono, semitono, cent musicale, battimenti.

Abstract: *In the end, a musical temperament is the set of rules with which one intends to construct a succession of frequencies of sounds called notes: introducing the principles that have inspired, over the centuries, the various temperaments and establishing a comparison*

* Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa; paolo.severino.manca@gmail.com.

between them should therefore not be particularly difficult. Unfortunately, the study and history of musical temperaments, a fascinating and multidisciplinary subject, are made difficult to understand by the use of an extremely unfortunate terminology and by the ignorance of elementary mathematical notions. The aim of these pages is to describe and evaluate the most well-known temperaments adopted in Western music with an unambiguous terminology and with the use of a few notions of elementary mathematics. Having highlighted the most shared rules that govern the construction of a temperament, the text concludes by providing some rules that allow one to construct the various temperaments and perhaps new "personalized temperaments".

Keywords: Musical temperaments, Pythagorean temperament, meantone temperament, Zarlinian temperament, equal temperament, harmonic sounds, octave, tone, semitone, musical cent, beats.

Citazione: Manca P.S., *Temperamenti musicali senza le UCAS*, «ArteScienza», Anno XI, N. 21, pp. 101-132, DOI:10.30449/AS.v11n21.191.

1 - Introduzione

Semplificando brutalmente, il problema dei temperamenti musicali si riconduce alla individuazione delle frequenze delle dodici note che formano una ottava, dove per ottava si intende l'intervallo musicale che separa due note di cui la seconda ha frequenza doppia della prima.

Nonostante le innumerevoli proposte di temperamento musicale avanzate nei secoli la questione resta inconclusa.

Cercare di comprendere le problematiche e le motivazioni che tuttora giustificano l'interesse sul tema dei temperamenti non risulta tuttavia facile, in primis per i contributi delle UCAS, in secundis perché il linguaggio musicale si è costituito nei secoli per stratificazioni successive e dunque senza un disegno organico razionale: tutto ciò ha determinato una terminologia non univoca, ridondante, inutilmente ambigua anche per gli addetti ai lavori.

Si aggiunge che sul tema regna tuttora molta confusione anche grazie alle corbellerie che personaggi improbabili (e temerari perché forniscono anche nome e cognome) scrivono e pubblicano anche su internet: incompetenti, ignorantissimi, senza orrore di se stessi.

Con queste pagine cerco di presentare in modo comprensibile e corretto il tema dei temperamenti musicali per fornire una base di conoscenze condivisa e corretta: non storia dei temperamenti, non analisi e critica musicale, ma impostazione ed esposizione snella dei principi che hanno suggerito la formulazione dei diversi temperamenti nella cultura musicale occidentale. Il tutto con un linguaggio comprensibile e per quanto possibile semplice ma, come diceva Albert Einstein, “non troppo semplice”.

2 - Le UCAS

Possediamo una Costituzione formidabile a cui nulla vi è da aggiungere e da togliere salvo qualche chiarimento a margine, perché, ad esempio, con riferimento all'articolo uno che dichiara «l'Italia repubblica fondata sul lavoro», sembra opportuno specificare in nota “fondata sul lavoro e anche, di fatto, sulle UCAS”.

Le UCAS (Unità di Complicazione di Affari-attività-adempimenti Semplici) sono infatti una caratteristica che connota ogni istituzione umana composta da un numero significativo di persone.

Senza le UCAS non esisterebbero molte categorie di specialisti in ogni disciplina umana : i burocrati innanzitutto , poi i giudici e gli avvocati, i commercialisti, i consulenti aziendali e finanziari , i luminari della medicina, i formatori, gli “esperti” in generale.

Le UCAS basano il loro successo su due grandi pilastri : il pilastro del linguaggio, il pilastro delle procedure.

Il linguaggio è il tratto distintivo dell'essere umano : in genere viene utilizzato correttamente come strumento di comunicazione, di socializzazione, di collaborazione, mentre le UCAS lo utilizzano per creare terminologie contorte ambigue ridondanti che costituiscono una barriera formidabile all'accesso alla conoscenza per “gli altri” e diventano quindi uno strumento fondamentale per creare intimidazione, discriminazione soggezione.¹

Le procedure sanzionano l'abisso che separa i comuni mortali

1 Famoso il burocrate che coi nemici “applica” il regolamento, con gli amici “lo interpreta”.

dagli “addetti ai lavori” e alimentano le iniquità e la corruzione.

Ho lottato invano tutta la vita contro le UCAS e quando, studiando canto,² le ho ritrovate presenti e nefaste quando ho cercato di capire qualcosa sui temperamenti musicali, ho capito che dovevo ribellarmi, anche se pur inutilmente, scrivendo queste sintetiche pagine.

Le note musicali sono poche e dunque sui temperamenti non ci sarebbe troppo da dire ma con la presenza delle UCAS tutto diventa incomprensibile e terrificante.

Per intuire il contributo delle UCAS in campo musicale circa l’adozione del linguaggio ricordo il comma di Didimo, lo schisma, la limma, la quinta del lupo, la quinta diminuita ascendente,³ e mi limito a riportare un campione casuale di frasi tratte qua e là da accreditati testi sulla teoria dei temperamenti musicali:

- “Nella musica tonale le note sono organizzate gerarchicamente intorno a una nota principale. Ogni nota ha una funzione musicale, in questo modo le varie note stabiliscono un gioco di tensioni che dà impulso allo sviluppo del processo musicale. Tale funzionalità fa in modo che sia necessario accordare alcuni intervalli in maniera diversa in base al contesto in cui si presentano.”
- “Tutte le possibili scale possono essere disposte nel circolo delle quinte. Tale disposizione prevede le armature di chiave caratterizzanti le scale collocate in modo da formare un cerchio, secondo una progressione crescente di diesis o decrescente di bemolli.”
- “Esistono delle tonalità maggiori in cui i suoni principali non devono essere alterati verso l’alto, ma verso il basso, per poter garantire il carattere maggiore della scala con la giusta successione di toni interi e di semitoni.”
- “In una triade maggiore, l’intervallo di terza più basso è maggiore e quello più acuto è minore. Se la terza più bassa è maggiore,

2 Ho inciso un disco e su youtube trovate qualche mio brano a “paolo severino nonché”.

3 Si può obiettare che molti termini hanno una genesi storica e una tradizione d’uso secolare e tuttavia occorre anche riconoscere che, sia nel linguaggio comune che in quello scientifico, la terminologia si evolve; così non usiamo più termini come *pofferbacco*, *conciossiacosachè*, *idiosincratice*, nella misura in cui e quant’altro.

sotterra sempre una triade maggiore, qualunque sia il suono di partenza. La triade minore è formata invece di una terza minore sotto e di una terza maggiore sopra. Se l'intervallo di terza posto in basso è minore si formerà sempre una triade minore."

- "Ampliando di un semitono un intervallo maggiore o giusto diventa aumentato, ampliandolo di due semitoni diventa più che aumentato; riducendo di un semitono un intervallo minore o giusto, questo diventa diminuito, riducendolo di due semitoni diventa più che diminuito"

3 - Temperamenti musicali

La musica è l'arte che si occupa di combinare e organizzare i suoni e i silenzi producendo ritmo melodia e armonia in una fusione capace di trasmettere un messaggio ineffabile al cervello e al cuore.

Gli elementi essenziali della musica sono, oltre alle note, il ritmo, la melodia e l'armonia. Semplificando brutalmente il ritmo è una sequenza di tempi che separano i successivi suoni, la melodia è una sequenza di note suonate in successione e si parla, in tal senso, di organizzazione orizzontale delle note, l'armonia è un insieme di note suonate contemporaneamente e si parla, in tal senso, di accordi e, più pomposamente, di organizzazione verticale delle note.

Il ritmo appare ai primordi dell'esistenza umana e i primi strumenti ritmici non sono altro che tronchi e pietre e massi risonanti.

La melodia appare presso i popoli antichi più evoluti (Cinesi, Egiziani, Greci, Romani, ecc...) e progredisce di pari passo con le altre arti e particolarmente con la poesia e la danza.

L'armonia nasce intorno all'undicesimo secolo e si afferma con regole proprie intorno al XVII secolo.

Anche se nell'intervallo dei suoni udibili dall'orecchio umano ad ogni frequenza si potrebbe far corrispondere una nota, nella gestione dei suoni e nella primitiva realizzazione di strumenti musicali l'umanità è dovuta ricorrere ad un numero limitato di suoni.

La scelta di una ragionevole sequenza di tali suoni ha dato luogo alla nascita dei temperamenti.

In breve un temperamento è un insieme di regole atte ad individuare un numero modesto di note all'interno di un particolare intervallo musicale.

Un insieme di regole che:

- fissa un intervallo musicale che chiameremo astrattamente ottava;
- divide tale ottava in una successione di suoni di assegnata frequenza che definisce il nome delle note contenute nell'ottava;
- replica lo schema dell'ottava in ottave successive.

Nella pratica l'ottava è stata divisa in dodici note e tale numero sembra definitivamente fissato, e dunque, semplificando, un temperamento si sostanzia in un insieme di regole per individuare 12 note nel contesto di una ottava.

Per motivi ovvi un temperamento accettabile deve individuare le note con criteri di "armonicità" e tuttavia l'armonicità non è una proprietà suscettibile di una definizione oggettiva: la musica è una successione di suoni che attraverso l'orecchio vengono interpretati dal cervello e l'interpretazione dipende dalla bontà dell'udito, dall'educazione musicale acquisita, dalla sensibilità del percettore, e dunque l'armonicità è una caratteristica ampiamente soggettiva.

Si comprende, anche per questo, come la storia dei temperamenti musicali sia stata particolarmente ricca di proposte e come ciascuna proposta non sia risultata definitiva.

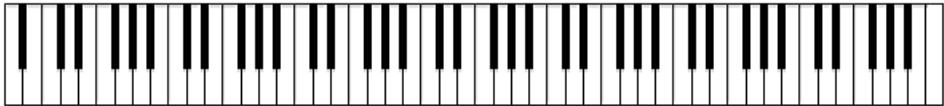
4 - La tastiera del pianoforte

Per introdurre una terminologia non equivoca con un linguaggio abbordabile faccio riferimento alla tastiera di un pianoforte.

La tastiera di un pianoforte moderno comprende 88 tasti di cui 53 tasti bianchi e 35 neri. Ad ogni tasto corrisponde una frequenza che si chiama nota e, in questo senso, parlerò indifferentemente di tasti o di note.

Procedendo da sinistra a destra si trovano tasti/note di colore bianco o nero.

Con riferimento ai soli tasti bianchi, a partire dal tasto/note più a sinistra della tastiera abbiamo le note/tasti di nome La e Si e successivamente sette note/tasti che in italiano e nelle altre lingue derivate dal latino si chiamano: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si e formano quella che si chiama ottava.



Questa successione di sette note si ripete (con gli stessi nomi) per altre sei volte.

In passato la prima nota dell'ottava, Do, veniva chiamata Ut.⁴

In tedesco e in inglese tali note vengono indicate con le prime sette lettere dell'alfabeto facendo corrispondere al Do la lettera C e quindi in successione : D, E, F, G, A, B:⁵

C	D	E	F	G	A	B
Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si.

A partire dalla sinistra dunque, nella tastiera del piano, dopo le note bianche La e Si, si contano, sempre da sinistra a destra sette ottave.

Per distinguere le note/tasti delle varie ottave si parte dal Do più a destra che si indica come Do⁹,⁶ e procedendo da destra verso

4 I nomi delle note risalgono al XII secolo e fu Guido d'Arezzo, un famoso teorico della musica, a proporlo. Egli utilizzò le sillabe iniziali dei primi sei versetti di un inno a San Giovanni Battista: *UT queant laxis / REsonare fibris / MIra gestorum / FANuli tuorum / SOLve polluti / LABii reatum, Sancte Iohannes*. Nel XVI secolo la settima nota si chiamò SI, dalle iniziali di Sancte Iohannes), e nel XVII secolo la nota UT venne chiamata DO.

5 In Germania al posto della B oggi si usa la lettera H. La scala tedesca si legge dunque così: C, D, E, F, G, A, H.

6 Anche in questo caso non vi è totale uniformità. In alcune nazioni il Do⁹ viene indicato

sinistra, abbiamo quindi :

Si₈, La₈, Sol₈, Fa₈, Mi₈, Re₈, Do₈, Si₇, La₇, Sol₇ e così via fino a giungere al Do₂ e alle ultime due note bianche finali il Si₁ e il La₁.

Il quarto Do a partire da sinistra è il *Do centrale* che nella notazione qui adottata coincide col Do₅.

In ogni ottava, oltre alle sette note/tasti bianche, si contano cinque note/tasti nere per un totale di dodici tasti/note consecutive.

Delle note/tasti nere ci occuperemo successivamente ma diciamo sin d'ora che vengono designate come note alterate e indicate col nome della nota bianca adiacente a sinistra seguita dal simbolo diesis #, ovvero col nome della nota bianca a destra seguita dal simbolo bemolle *b*.⁷



Con riferimento ai soli tasti bianchi, in ogni ottava ogni nota possiede un "grado" a seconda del posto che occupa nella successione: così, rispetto al Do, Re è secondo grado, Mi è terzo grado, Fa è quarto grado, Sol è quinto grado, La è sesto grado, Si è settimo grado.

Il suono prodotto dalla pressione di un tasto, nota, dipende dall'accordatura ma, a prescindere da come sia stato accordato il piano, si usa definire come distanza che intercorre fra due note/tasti bianche il numero di note/tasti bianchi che li separano, contando sia il suono di partenza sia quello di arrivo. Così per esempio dal Do al Sol si contano cinque note: si parla in tal caso di intervallo di quinta. Dal Sol al Si si contano tre note: si parla in tal caso di intervallo di terza e così via.

con D₈ e così di conseguenza tutte le altre note.

⁷ Esistono anche il doppio diesis e il doppio bemolle e il bequadro ma conviene per ora sorvolare.

Come vedremo la distanza fra due note si misura più correttamente come differenza tra le rispettive frequenze.

5 - Il temperamento equabile

Premetto che si intende per **suono** la trasmissione di energia di un corpo vibrante attraverso un mezzo elastico, e contemporaneamente, la percezione di tale trasmissione di energia da parte di un idoneo sistema di rivelazione e in particolare dell'orecchio umano.

Ad ogni tasto/nota del pianoforte corrisponde fisicamente un martelletto e una corda vibrante che, sollecitata dal martelletto, emette un suono di una certa frequenza.⁸ La frequenza di tale suono è regolata dall'accordatura, un insieme di regole teoriche e pratiche che, aggiustando la tensione e altri parametri fisici della corda, determina il valore delle frequenze della nota emessa.

L'accordatura si realizza in funzione delle regole fissate dal temperamento adottato e il problema centrale della musica è sempre stato quello di organizzare sistemi di suoni che diano una percezione di consonanza, armonia e gradevolezza.

Si intende che la valutazione di consonanza armonia gradevolezza è soggettiva e dunque la stessa produzione di suoni può essere percepita come orrenda cacofonia o come sublime meravigliosa espressione musicale da due soggetti differenti, in funzione sia delle capacità uditive, sia della specifica formazione e cultura musicale.

Al termine temperamento è associato anche il termine di scala che indica la successione di note, di solito 7 o 12, individuate dal temperamento stesso.

Popoli e culture diverse hanno adottato scale diverse e una stessa cultura musicale ha adottato differenti scale nel corso della storia al mutare nel tempo della sensibilità musicale.

Con questa terminologia dunque il termine temperamento⁹ si riferisce ai criteri e alle modalità con cui viene individuata una scala

8 In effetti, si veda l'appendice, si tratta di un suono formato da una frequenza di base e da una serie di armoniche, cioè di suoni ciascuno con frequenza multipla della frequenza base.

9 Qualcuno delle UCAS parla anche di "sistema tonale"

e dunque un temperamento si identifica con l'adozione di un criterio per costruire le scale a partire da alcuni intervalli di riferimento. Ancor più astrattamente un temperamento è ogni insieme di regole che consente di definire le frequenze delle varie note o equivalentemente le distanze che separano le frequenze delle varie note della scala dalla prima nota.

È importante osservare che:

- L'altezza di un suono è misurata dalla sua frequenza : tanto maggiore la frequenza tanto maggiore l'altezza.
- La "distanza di altezza tra due suoni", che si dice intervallo, si misura come rapporto delle rispettive frequenze. Se: f_1 , f_2 sono le frequenze, con : $f_1 > f_2$ allora $h = f_1/f_2$ è l'intervallo che ne misura la "distanza".
- L'utilizzo del rapporto e non della differenza per misurare un intervallo dipende dalle caratteristiche dell'orecchio umano che percepisce appunto i rapporti tra frequenze piuttosto che la loro differenza di valori.

Ne segue che gli intervalli non si sommano ma si moltiplicano.

Così, se l'intervallo tra il suono A e il suono B è h , l'intervallo tra il suono B e il suono C è k , allora l'intervallo tra A e C vale hk .

Dunque il temperamento equabile, che oggi per ragioni molteplici prevale,¹⁰ prevede in ogni ottava dodici note e si distingue da ogni altro temperamento per la costanza dell'intervallo che separa una nota dalla successiva.

Nel temperamento equabile l'intervallo di ottava¹¹ viene diviso in dodici intervalli uguali che si chiamano semitoni (S), mentre si chiama tono (T) l'intervallo formato da due semitoni.

Nel pianoforte, accordato secondo il temperamento equabile, a ogni ottava corrispondono dodici tasti: sette tasti bianchi e cinque tasti neri.

10 Non necessariamente il temperamento equabile può definirsi il migliore anche perchè non esiste un criterio assoluto per giudicare la bontà di un temperamento.

11 Ottava : un intervallo nel quale il rapporto tra le frequenze dei due suoni che iniziano e terminano la scala è uguale a due per cui in una ottava l'ultima nota ha frequenza doppia della prima nota.

I sette tasti bianchi corrispondono alle note cosiddette naturali.

I cinque tasti neri corrispondono alle note cosiddette alterate: i diesis (#) e i bemolle (b).

Precisamente da sinistra a destra abbiamo:

Do, Do# = Reb, Re, Re# = Mib, Mi, Mi# = Fab, Fa, Fa# = Solb, Sol, Sol# = Lab, La, La# = Sib, Si.

I diesis si ottengono dalle note Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si aumentandole di un semitono, i bemolle si ottengono diminuendole di un semitono.

Così il Do diesis, Do#, rappresenta la nota Do aumentata di un semitono. Il Do bemolle, Dob, rappresenta la nota Do diminuita di un semitono

Poiché nel temperamento equabile le note successive differiscono di un semitono, il diesis di una nota bianca coincide col bemolle della nota bianca successiva.

Come vedremo questa coincidenza non vale in altri temperamenti.

Poiché l'intervallo di ottava vale 2 e nel temperamento equabile tutti gli intervalli di semitono sono uguali, indicando con k l'intervallo di un semitono deve risultare:

$$(1) \quad k^{12} = 2$$

cioè equivalentemente:

$$(2) \quad k = \sqrt[12]{2}$$

Poiché $\sqrt[12]{2}$ è irrazionale tale risulta anche k e, limitandoci alle prime cifre decimali, risulta:¹²

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{semitono} & k = 1,05946309436 \\ \text{tono} & k^2 = 1,12246204831 \end{array}$$

¹² Se k fosse razionale sarebbe razionale $\sqrt[12]{2}$ in quanto prodotto di numeri razionali, ma $\sqrt[12]{2}$ è un numero irrazionale come già era noto ai pitagorici.

$$\begin{aligned}k^3 &= 1,189207115 \\k^4 &= 1,25992104989 \\k^5 &= 1,33483985417 \\k^6 &= 1,41421356237 \\k^7 &= 1,49830707687 \\k^8 &= 1,58740105196 \\k^9 &= 1,6817928305 \\k^{10} &= 1,78179743627 \\k^{11} &= 1,88774862535 \\k^{12} &= 2\end{aligned}$$

Dunque nella scala equabile, prendendo come riferimento la frequenza della prima nota dell'ottava, abbiamo come frequenze relative (a tale frequenza) delle altre note nell'ottava e con approssimazione a quattro decimali :

1	Do
1,05994	Do# = <i>Reb</i>
1,189	Re
1,1224	Re# = <i>Mib</i>
1,2599	Mi
1,3348	Fa
1,4142	Fa# = <i>Solb</i>
1,4983	Sol
1,5874	Sol# = <i>Lab</i>
1,6817	La
1,7817	La# = <i>Sib</i>
1,8877	Si
2	Do

Dopo varie vicissitudini la comunità internazionale nella Seconda Conferenza Internazionale per il Diapason, nel 1939 a Londra, ha:

- fissato il nome delle 12 note della scala¹³ e precisamente, a partire dalla prima nota e con intervallo di un semitono: Do, Do#=Reb, Re, Re#=Mib, Mi, Fa, Fa#=Solb, Sol, Sol#=Lab, La, La#=Sib, Si ;
- numerato le ottave da 1 a 9 (quelle percepibili dall'orecchio umano)
- fissato come frequenza di riferimento la frequenza pari a 440 hertz corrispondente al La⁴¹⁴ cioè il La della quarta ottava.¹⁵

Se dunque alla nota La₄ assegniamo la frequenza 440, partendo da La₄ e utilizzando i rapporti delle frequenze così come sopra riportato, col temperamento equabile otteniamo la seguente tabella di frequenze (con l' approssimazione del caso):¹⁶

Note	ottave									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	16,35	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093	4186	8372
Do#-Reb	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217	4435	8870
Re	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349	4699	9397
Re#-Mib	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489	4978	9956
Mi	20,60	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637	5274	10548
Fa	21,83	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794	5588	11175
Fa#-Solb	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960	5920	11840
Sol	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136	6272	12544
Sol#-Lab	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322	6645	13290
La	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520	7040	14080
La#-Sib	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729	7459	14917
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951	7902	15804

Ribadisco che, proprio per come è stato definito nel temperamento equabile, il diesis di una nota non alterata coincide col bemolle della nota non alterata successiva.

13 Do diesis ovvero Do# ; il Do bemolle ovvero Dob.

Genericamente il diesis indica un semintono in più, il bemolle indica un semitono in meno..

14 Che peraltro, in altre consuetudini, viene indicato come La₃.

15 Solamente nel 1971 l'intonazione con il La₄ a 440 Hz fu riconosciuta sul piano giuridico da una delegazione nominata dal Consiglio d'Europa a cui si adeguò anche l'Italia. Col che ad oggi tutti i diapason emettono un suono semplice di 440 hertz.

16 Per trovare le note antecedenti a La₄ si divide la frequenza ogni volta per k (= 1,059463), per trovare le note successive a La₄ si moltiplica la frequenza ogni volta per k.

Poiché l'intervallo che separa due tasti adiacenti, bianchi o neri che siano, vale un semitono, faccio notare che l'intervallo che separa due tasti bianchi adiacenti e intervallati in alto da un tasto nero vale un tono.¹⁷

6 - Vari tipi di scale maggiori e minori

La terminologia è sovrabbondante ma è necessario conoscerla. Grazie al "linguaggio UCAS" la scala di dodici note viene detta cromatica, se si suonano invece solo i tasti bianchi uno dietro l'altro a partire da un Do si ottiene una successione di sette note detta scala diatonica di Do maggiore, in tal caso, tra Do e Re intercorre un tono, tra Re e Mi intercorre un tono, tra Mi e Fa intercorre un semitono, tra Fa e Sol intercorre un tono, tra Sol e La intercorre un tono, tra La e Si intercorre un tono, tra Si e Do (dell'ottava successiva) intercorre un semitono.

La scala : Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do, è detta anche scala naturale.

La sequenza di toni e semitoni che la contraddistingue è dunque:

T, T, S, T, T, T, S.

Con tale sequenza di intervalli possiamo iniziare da qualsiasi altra nota e ottenere altrettante scale dette scale maggiori che si contrappongono alle scale minori in cui la sequenza degli intervalli è diversa.¹⁸

17 Grazie al contributo UCAS i semitoni possono essere cromatici (l'intervallo che passa fra due suoni consecutivi dello stesso nome, di cui uno alterato, ad esempio Re \flat e Re), oppure diatonici (l'intervallo che passa fra due suoni consecutivi di nome diverso, come per esempio Do \sharp e Re). Esistono anche altre complicanze che tralasciamo.

18 Sempre grazie al contributo UCAS la prima nota di ogni scala è chiamata tonica. La seconda nota viene chiamata sopratonica. La terza nota può assumere tre nomi: medianta, modale o caratteristica. La quarta nota sottodominante. La quinta nota è chiamata dominante. La sesta nota è chiamata sopradominante. La settima nota può assumere due nomi: sensibile o sottotonica.

Così ad esempio formano una scala maggiore le note:

Sol La Si Do Re Mi Fa# Sol: scala di Sol

Fa Sol La Sib Do Re Mi Fa: scala di Fa

Re Mi Fa# Sol La Si Do# Re: scala di Re

Dunque qualunque sia il suono/nota con cui ha inizio una scala, le scale intervallate dalla successione di toni e semitoni come la scala naturale si chiamano scale maggiori e poiché ogni ottava contiene 12 note possiamo così formare 12 scale di modo maggiore.

Alternando diversamente i cinque toni e i due semitoni della scala si ottengono le scale minori. Matematicamente parlando possiamo osservare che le possibili distinte sequenze di cinque toni e due semitoni sono ventuno : $\frac{1}{2} (7 \times 6) = 21$ e dunque ci si potrebbe sbizzarrire con altrettante "scale".

Le scale minori che più si adottano sono la scala minore naturale, la scala minore armonica e la scala minore melodica :

Scala minore naturale: T, S, T, T, S, T, T

Scala minore armonica: T, S, T, T, T, S, S

Scala minore melodica: S, T, T, T, T, S

La prima nota della scala su cui viene costruito un brano musicale si indica come *tonalità*.

Raramente un brano musicale è costruito solo su un'unica tonalità: sovente infatti la musica passa da una scala ad un'altra. Questo fenomeno ha il nome di *modulazione*. La modulazione quindi indica il passaggio da una tonalità all'altra.

Il temperamento equabile consente di trasportare melodie e brani da una tonalità all'altra. Questo procedimento prende il nome di *trasporto* ed è molto utile per cantare melodie altrimenti troppo acute o troppo gravi, o per adattare un brano all'estensione di un certo strumento.

Come vedremo questa possibilità non appartiene ad altri temperamenti.

Termino con alcune osservazioni.

La scelta della frequenza di 440 herz per il La₄ è ovviamente una convenzione e comporta per il Do₄ una frequenza 261,2 Hz.

Nella storia musicale peraltro sono state adottate anche altre scelte.

Ad esempio si è scelta come frequenza di riferimento per il Do₄, sempre per convenzione, la frequenza di 256 hertz, del resto poco discosta dall'attuale 261,6 perché presenta il vantaggio di poter assegnare ai vari Do una frequenza espressa da un numero intero.¹⁹ Infatti poiché $256 = 2^8$, a partire dal Do₄ la frequenza relativa degli altri Do risulta intera e pari ad una potenza di 2 e precisamente:

$$\begin{aligned} \text{Do}_9 &= 2^{13}, \text{Do}_8 = 2^{12}, \text{Do}_7 = 2^{11}, \text{Do}_6 = 2^{10}, \\ \text{Do}_5 &= 2^9, \text{Do}_4 = 2^8, \text{Do}_3 = 2^7, \text{Do}_2 = 2^6, \text{Do}_1 = 2^5. \end{aligned}$$

Il vantaggio non è tuttavia rilevante poiché anche con questa convenzione, le frequenze di tutte le altre note risulterebbero comunque espresse da un numero irrazionale.²⁰

Un'altra scelta, tuttora adottata, assume per il La₄ una frequenza più bassa di quella ufficialmente adottata: la frequenza di 432 hz.

Sono molti i personaggi del mondo della musica che hanno sostenuto l'accordatura con il La₄ a 432 Hz: Mozart la usava con le sue orchestre, anche i famosi violini Stradivari erano costruiti per essere accordati a 432 Hz.

Fu probabilmente Verdi il più importante sostenitore del 432 Hz tanto che in collaborazione con altri musicisti e scienziati dell'epoca

¹⁹ La storia della definizione della frequenza di riferimento esula dagli obiettivi del testo, accenniamo solo che fino al XVII secolo l'intonazione degli strumenti musicali variava molto da paese a paese e che la proposta del Do₄ a 256 Hz venne fatta dal fisico Joseph Sauveur (1653-1716).

²⁰ Infatti ogni altra frequenza si ottiene moltiplicando tali numeri interi per il numero irrazionale k e il prodotto di un numero razionale per un numero irrazionale è un numero irrazionale. (vedi A)

fece approvare dal senato italiano una legge (restata in vigore per un periodo limitato) che ne stabiliva lo standard. In tempi recenti il gruppo più famoso che ha suonato e registrato a 432 Hz sono i Pink Floyd nel Live in Pompei. Per i più esigenti aggiungo qualche precisazione.

Le soluzioni La4 a 432 hz, oppure Do4 a 256 hz , differiscono leggermente. Attribuendo al Do4 frequenza 256, per la frequenza del La4 abbiamo:

$$\text{freq (La4)} = \text{freq(Do4)} \times k^9 = 256 \times 1,6817928305 = 430,53896448$$

Attribuendo al La4 frequenza 432 hz per la frequenza del Do4 abbiamo:

$$\text{freq (Do4)} = \text{freq(La4)} \times k^{-9} = 432 / 1,6817928305 = 256,8687368$$

Grazie al contributo UCAS, come visto, la nomenclatura sulle scale è particolarmente confusa cosicchè risulta possibile leggere affermazioni del tipo: "Il cosiddetto ciclo diatonico delle quinte è un ciclo delle quinte che utilizza solo le note di una scala maggiore, o diatonica. Ciò implica che un passaggio sia di quinta diminuita, anziché di quinta giusta. Ad esempio nella scala di Do il ciclo diatonico delle quinte è il seguente: Do Fa Si Mi La Re Sol Do. Il passaggio da Fa a Si è di una quinta diminuita discendente anziché di una quinta giusta discendente".²¹

Ma le UCAS non si fermano qui e per esempio per le sette note usano anche, in sequenza, i termini : Tonica, Sopratonica, Modale, Sottodominante, Dominante, Sopradominante, Sensibile , I grado, II grado, III grado, IV grado, V grado, VI grado, VII grado.

7 - Il cent

Nel temperamento equabile il semitono (detto anche semitono temperato) non è in termini assoluti il più piccolo intervallo utilizzato

21 Per misericordia evito anche in questo caso di citare l'autore.

in teoria musicale, il più piccolo intervallo è infatti il cent.

Purtroppo per il cent occorre scomodare la matematica e tuttavia il ricorso al cent permette di confrontare tra loro i temperamenti, eliminare molti fraintendimenti, evidenziare il linguaggio pernicioso delle UCAS affinché qualcosa finalmente cambi.

Si definisce il cent affermando che cento cent formano un semitono equabile, ne segue, poichè 12 semitoni formano una ottava, che in una ottava si contano 1200 cent e dunque se indichiamo con c il valore di un cent risulta :

$$c^{1200} = 2 \quad \text{e quindi} \quad c = \sqrt[1200]{2}$$

Il cent consente di confrontare quantitativamente le differenze di frequenza della note in base ai differenti temperamenti musicali adottati.

Si tenga conto che la minima variazione di altezza percepibile dall'orecchio umano è circa 10 cent durante le esecuzioni musicali "dal vivo" e può arrivare a 2 cent in particolari condizioni di ascolto.

Per capire cosa rappresenti il cent sono necessarie poche nozioni di algebra elementare che tuttavia sembrano ignorate in molti testi di teoria musicale che riescono a rendere incomprensibile anche questo argomento, fino a rasentare in qualche caso il turpiloquio.²²

Il semitono si basa sulla suddivisione dell'ottava in 12 intervalli uguali, per cui detto

k il valore del semitono, abbiamo le scritture equivalenti:

$$(*) \quad k^{12} = 2 \quad , \quad 12 \cdot \log_2 k = \log_2 2 \quad \text{cioè,} \quad 12 \cdot \log_2 k = 1 \quad , \quad \log_2 k = 1/12$$

Poiché un semitono vale 100 cent per cui il cent si basa sulla suddivisione dell'ottava in 1200 intervalli uguali, $k = c^{100}$, dalle (*) segue banalmente :

$$(**) \quad c^{1200} = 2 \quad , \quad 1200 \cdot \log_2 c = \log_2 2$$

22 Per non parlare delle corbellerie in merito riportate su internet da "esperti" che non hanno orrore di se stessi.

cioè,:

$$1200 \cdot \log_2 c = 1, \log_2 c = 1/1200$$

Con diversa ma equivalente notazione abbiamo ancora :

$$k = \sqrt[12]{2} = 2^{1/12} = 1,05946309436$$

$$k = c^{100}$$

$$c = \sqrt[1200]{2} = 2^{1/1200} = 1,00057779$$

Purtroppo, la definizione del cent²³ si presta a paurose confusioni per l'errata interpretazione di una proprietà elementare della funzione esponenziale per cui risulta:²⁴

$$c^a \cdot c^b = c^{a+b}$$

quindi un intervallo di x cent e un intervallo di y cent formano complessivamente un intervallo di x + y cent.

- gli intervalli si moltiplicano,
- gli esponenti che misurano gli intervalli in cent si sommano.

Ad esempio se nel temperamento equabile la scala diatonica in Do maggiore misuriamo le note in frequenze relative e in cent abbiamo rispettivamente :

1	1,1224	1,2599	1,3348	1,4983	1,6817	1,8877	2
0	200	400	500	700	900	1100	1200

Aggiungo per i più audaci qualche altra formuletta.

23 Introdotta nel 1875 dal matematico inglese Alexander Ellis (1814-1890) che ha sfruttato banalmente la proprietà degli esponenziali.

24 Proprietà che trova corrispondenza nei logaritmi per cui il logaritmo del prodotto di due fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori stessi: $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

Consegue da quanto precisato che date due note di frequenza f_1 ed f_2 , $f_2 > f_1$, e il rapporto $r = f_2/f_1$ che misura l'intervallo che le separa, se si vuole conoscere quanti semitoni corrispondono a un tale intervallo occorre risolvere rispetto a n l'equazione esponenziale:

$$(2^{1/12})^n = r \quad \text{ovvero} \quad k^n = r \quad \text{con} \quad k = 2^{1/12}$$

E dunque:

$$n = \log r / \log k$$

Tra l'altro, poiché banalmente $\log_2 2 = 1$ e dunque $\log_2 k = 1/12$, abbiamo anche:

$$n = (1/12) \cdot \log_2 r = (1/12) \cdot [\log_2 f_2 - \log_2 f_1]$$

Analogamente date due note di frequenza f_1 ed f_2 , $f_2 > f_1$, e il rapporto $r = f_2/f_1$ che misura l'intervallo che le separa, se si vuole conoscere quanti cent corrispondono a un tale intervallo occorre risolvere in m l'equazione esponenziale:

$$(2^{1/1200})^m = r$$

8 - Il temperamento pitagorico

Il primo sistema musicale adottato in occidente fin da tempi molto antichi è fondato sulla concezione della musica presso i pitagorici.²⁵

Nella visione pitagorica la musica ha un ruolo assai rilevante: rappresenta l'armonia invisibile del mondo e le relazioni tra i suoni imitano l'evoluzione delle sfere celesti, l'energia dell'anima universale e l'ordine interno di ogni singolo individuo, scintilla sulla terra dell'anima universale.

I pitagorici verificarono che l'armonia musicale è strettamente legata ai rapporti numerici che sussistono tra certe grandezze misu-

25 Non considero la musica orientale.

rabili sullo strumento che produce i suoni.

Tale grandezza per gli strumenti a corda, a parità di tensione e altri parametri fisici, è la lunghezza della corda:²⁶ sperimentalmente i pitagorici verificarono che l'armonia tra i suoni si genera quando le lunghezze in gioco stanno tra loro in rapporti semplici, esprimibili cioè mediante una frazione del tipo m/n essendo m ed n numeri interi piccoli.

Le consonanze fra i suoni furono studiate dai pitagorici analizzando i suoni prodotti dal monocordo, uno strumento costituito da una corda tesa tra due estremi fissi, al di sotto della quale scorre liberamente un ponticello mobile che divide la corda in due segmenti di lunghezza variabile.

Ascoltando il suono prodotto da queste porzioni di corda, secondo i pitagorici si otteneva un suono consonante solo quando il rapporto tra le misure di tali porzioni risultava espresso da una frazione costituita dai numeri 1, 2, 3, 4 che avevano oltretutto un significato esoterico relevantissimo.²⁷

Utilizzando rapporti composti da tali numeri i pitagorici riten-

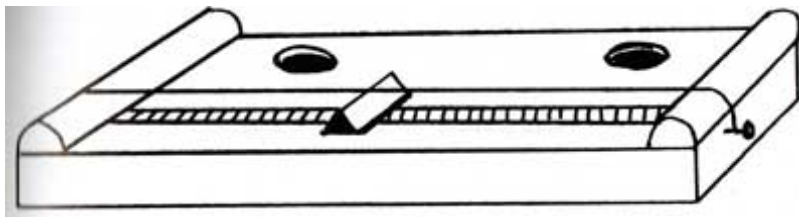


Fig. 1 - Il monocordo pitagorico.

26 Per uno strumento a fiato può essere la lunghezza e il diametro della canna, ecc...

27 Nell'Aritmosofia pitagorica la Monade (1) rappresenta la Ragione, l'Uno, il principio primo, è considerato impari cioè né pari né dispari e geometricamente rappresenta il punto. La Diade (numero 2) rappresenta la parte femminile, l'indefinito e illimitato, l'opinione (sempre duplice) e geometricamente la linea. La Triade numero 3, rappresenta la parte maschile, il definito e limitato e geometricamente il piano. La Tetrade, numero 4, rappresenta la giustizia in quanto divisibile equamente da entrambe le parti. La Pentade, numero 5, rappresenta lo spozalizio poiché è la somma della parte femminile (2) e maschile (3), simboleggia la vita e il potere; il pentagramma è il simbolo dei pitagorici. La Decade, numero 10, è il numero perfetto, la fonte e radice dell'eterna natura perché il 10 "contiene" l'intero universo essendo la somma di 1,2,3 e 4; esso veniva rappresentato con la tetractys, il triangolo equilatero di lato 4, sul quale veniva fatto il giuramento di

nero di aver ottenuto tutte le consonanze necessarie.

I pitagorici ragionavano in termini di lunghezza della corda, poiché nel monocordo le frequenze risultano inversamente proporzionali alle lunghezze, in quanto segue ragioneremo in termini di frequenza.

Per costruire le loro consonanze, cioè la loro scala, i pitagorici si basavano su due intervalli solamente:

- l'intervallo di ottava che corrisponde ad un rapporto di lunghezze 1:2
- l'intervallo di quinta ascendente che corrisponde ad un rapporto di lunghezze 2 :3.

E per costruire le note procedevano “per quinte ascendenti e quinte discendenti e per ottave discendenti”.

Procedendo per quinte ascendenti la frequenza della nota di partenza viene moltiplicata per $3/2$, procedendo per quinte discendenti la frequenza viene divisa per $3/2$,²⁸ procedendo per ottave discendenti la frequenza viene divisa per due.

Quando per quinte ascendenti si ottiene una frequenza superiore a 2 si divide per due per ottenere una frequenza compresa nell'ottava di partenza.

Da qui il nome di “intervallo di quinta” per denotare l'intervallo che intercorre tra la prima nota Do, di frequenza relativa 1, e la quinta nota Sol, di frequenza relativa $3/2$.

Con questo meccanismo i pitagorici individuarono sette note che, ad opera di Guido d'Arezzo, intorno all'anno mille, hanno preso il nome: Do,²⁹ Re, Mi, Fa, Sol, La, Si.

La procedura dei pitagorici si traduce nel dire che si parte da una nota di base, ad esempio Do, di frequenza f_0 , quindi per una

adesione alla scuola pitagorica.

28 Ricordo che moltiplicare per $3/2$ equivale dividere per $2/3$, dividere per $3/2$ equivale a moltiplicare per $2/3$.

29 Guido D'Arezzo chiamò così le note utilizzando la prima sillaba dei versi di un inno dedicato a san Giovanni. Il nome della prima nota ut venne poi sostituito con do da Giovan Battista Doni, 1594-1647.

quinta ascendente si ottiene la frequenza $(3/2) \cdot f_0$, il Sol ; con una successiva quinta ascendente si ottiene la frequenza $(9/4) \cdot f_0$, il Re dell'ottava successiva, dividendo per 2 si ottiene la frequenza $(9/8) \cdot f_0$, il Re dell'ottava di partenza.

In generale quando si ottengono frequenze di suoni che si trovano nelle ottave superiori rispetto a quella che contiene la nota di riferimento, per riportare tali frequenze nell'ambito dell'ottava di partenza, si divide la frequenza così ottenuta per 2^n , dove n è il numero di ottave che si sono "percorse".

Così con quinte ascendenti si ottengono, partendo dal Do, le note Sol, Re, La, Mi, Si, e con una quinta discendente si ottiene il Fa.

Con ciò le frequenze relative delle note trovate formano la scala pitagorica (diatonica maggiore) che riportiamo in frazione, in numero decimale, in cent :

DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
$1/1$	$9/8$	$81/64$	$4/3$	$3/2$	$27/16$	$243/128$	$2/1$
1	1,125	1,2656	1,3333	1,5	1,6875	1,8984	2
0	204	408	498	702	906	1110	1200

Con il che se fissiamo la frequenza del Do pari a 261,6 hertz³⁰ abbiamo le frequenze:

261,6	294,3	331,1	348,8	392,4	441,5	496,7	523,2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Possiamo verificare che gli intervalli, "distanze", che intercorrono tra le note successive della scala pitagorica valgono:

$$9/8, 9/8, 256/243, 9/8, 9/8, 9/8, 256/243$$

L'intervallo $T = 9/8 = 1,125$ viene detto tono pitagorico e corri-

³⁰ Corrispondente ai 440 hz del La.

sponde a 204 cent a fronte dei 200 cent del tono equabile.

L'intervallo $S = 256 / 243 = 1,053349$ viene detto semitono pitagorico e corrisponde a 90 cent a fronte dei 100 cent del semitono equabile.³¹

Gli intervalli tra le note della scala pitagorica diatonica (di sette note) si susseguono dunque come : T, T, S, T, T, T, S cioè con la stessa sequenza delle scale maggiori nel temperamento equabile , con la differenza che due semitoni pitagorici corrispondono a meno di un tono pitagorico: 180 cent contro 200 cent.

È sorprendente confrontare la somiglianza degli intervalli ottenuti applicando il principio pitagorico, ispirato alla celebrazione dei "rapporti tra numeri interi piccoli", con gli intervalli ottenuti applicando il principio matematico dell' "equidistanza" della scala equabile tenuto altresì conto delle nozioni e degli strumenti di cui disponevano i pitagorici.³²

	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
1	1,125	1,2656	1,3333	1,5	1,6875	1,8984	2	
1	1,1224	1,26	1,3348	1,488	1,6818	1,8877	2	

e in termini di cent:³³

	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI	DO
0	204	408	498	702	906	1110	1200	
0	200	400	500	700	900	1100	1200	

La certezza, ereditata dai pitagorici, che il rapporto di numeri piccoli traduca principi universali di consonanza ha consolidato una terminologia sugli intervalli che occorre conoscere e che rende felici le UCAS:

31 Il semitono pitagorico si chiama anche limma (sempre ad opera delle UCAS)

32 In corsivo riportiamo i corrispondenti valori nella scala equabile.

33 In corsivo riportiamo i corrispondenti valori nella scala equabile.

	frazione	decimale	cent
terza minore	6/5	1,20	207,7
terza maggiore	5/4	1,25	386
quarta giusta	4/3	1,33	498
quinta giusta	3/2	1,50	701
sesta minore	8/5	1,60	813,6
sesta maggiore	5/3	1,66	884
settima maggiore	15/8	1,875	1088
ottava	2/1	2	1200

9 - La scala pitagorica cromatica

Come già detto il termine diatonico si riferisce alle scale di sette note. La scala cromatica nasce dall'esigenza di ampliare la gamma delle possibilità melodiche le quali risultano limitate per una scala diatonica.

I criteri di costruzione sono non univoci salvo rispettare il numero di note costituenti che è pari a 12.

Per passare dalla scala diatonica a quella cromatica si utilizza il fatto che il temperamento pitagorico si basa solo sulle due regole già segnalate:

1. raddoppio della frequenza (si va nell'ottava successiva) e dimezzamento (ottava precedente)
2. triplicazione (si sale per quinta) e trisezione della frequenza (si scende per quinta)

Possiamo quindi caratterizzare il temperamento stesso come quello che riconosce come (potenziali) note tutte quelle che si ottengono, modificando la frequenza di una frequenza base, secondo rapporti della forma :

$$3^p \cdot 2^q \quad \text{con } p \text{ e } q \text{ interi relativi e col vincolo } 1 \leq 3^p \cdot 2^q \leq 2.$$

Così le sette note della scala pitagorica diatonica si ottengono:

per $p=0, q=0$, rapporto $1/1$, nota indicata con Do.

per $p=1, q=-1$, rapporto $3/2$, quinta giusta, nota indicata con Sol.

per $p=-1, q=-2$, rapporto $4/3$, quarta giusta, nota indicata con Fa.

per $p=2$, $q= -3$, rapporto $9/8$,tono , nota indicata con Re.

per $p=5$, $q= -6$, rapporto $243/128$, semitono, nota indicata con Si

per $p=4$, $q= -6$, rapporto $81/64$ nota indicata con Mi.

per $p=3$, $q= -4$, rapporto $27/16$, nota indicata con La.

Per ampliare la scala si procede allora con le regole suesposte e coi vincoli di :

- continuare a garantire la consonanza degli intervalli di ottava e di quinta;
- rendere il più possibile uniformi i gradi consecutivi della scala;
- ottenere un numero piccolo di nuove note in modo da non avere frequenze troppo ravvicinate.

In questo modo si trovano anche le note:

Sol b	$1024/729 = 2^8/3^6$
Re b	$256/243 = 2^8/3^6$
La b	$128/81 = 2^8/3^4$
Mi b	$32/27 = 2^5/3^3$
Si b	$16/9 = 2^4/3^2$
Fa $\#$	$729/512 = 2^8/3^6$
Do $\#$	$2187/2048 = 2^8/3^6$
Sol $\#$	$6561/4096 = 2^8/3^6$

Tra queste, dovendone scegliere solo cinque, in base alla regola 2, sono state incluse nella scala: Do $\#$, Mi b , Fa $\#$, Sol $\#$, Si b mentre sono state escluse dalla scala : Re b , Re $\#$, Sol b , La b , Do $\#$.

Con linguaggio più consono alle UCAS , (e anche storicamente), le note sono state individuate salendo per quinte, per cui dal Si si ottengono le note Fad , Dod , Sold, e scendendo per quinte, per cui dal Fa si ottengono le note Sib e Mi b .³⁴

In definitiva la scala cromatica pitagorica viene formata dalle seguenti dodici note con le frequenze relative riportate in rapporti

34 Ad esempio, partendo dal La [a $128/81$ si troverà $128/81$ La b , \rightarrow $32/27$ Mi b , \rightarrow $16/79$ So l b , \rightarrow $4/3$ Fa , \rightarrow 1 Do , \rightarrow $3/2$ So l , \rightarrow $9/8$ Re , \rightarrow $27/16$ La , \rightarrow $81/64$ Mi , \rightarrow $243/128$ Si , \rightarrow $729/512$ Fa d , \rightarrow $2187/2048$ Do d , \rightarrow $6561/4096$ So l d .

decimali e cent :

Do	1	1	0
Do#	2187/2048	1,06787	114
Re	9/8	1,125	204
Mib	32/27	1,18518	294
Mi	81/64	1,265625	408
Fa	4/3	1,33333	498
Fa#	729/512	1,4238	612
Sol	3/2	1,5	702
Sol#	6561/4096	1,6018	816
La	27/16	1,6875	906
Sib	16/9	1,7777	996
Si	243/128	1,8984	1110
Do	2	2	1200

Chiudo con qualche osservazione.

- Con questi successivi ampliamenti il principio di ricorrere a rapporti semplici si è molto annacquato.
- Anche nella scala cromatica pitagorica gli intervalli tra le varie note restano di due tipi : semitono diatonico e semitono cromatico.

Come vedremo anche successivamente la presenza di tali semitoni e del comma pitagorico per uno strumento ad accordatura fissa, come ad esempio l'organo, rende impossibile la circolazione tra le tonalità (cioè la modulazione da una tonalità all'altra).³⁵

- Partendo dal Do, al variare di p e q nella formula, $3^p \cdot 2^q$, non si riesce a ritrovare un Do e ciò poichè per nessun valore intero n e di m può risultare: $(3/2)^n = 2^m$.³⁶

Fu proprio Pitagora a scoprire empiricamente che, benché in 7 ottave ci siano 12 quinte, il ciclo delle quinte dopo dodici suoni non si

³⁵ C'è da osservare che la frequenza del monocordo dipende anche dalla tensione, come venne successivamente verificato anche da Galileo Galilei applicando dei pesi al cavo. La variazione della frequenza dipendenza tuttavia dal quadrato del peso applicato pertanto se si fosse fatto riferimento ai rapporti fra pesi il valore esoterico della tetractis sarebbe venuto meno e forse lo sviluppo delle teorie musicali non sarebbe stato lo stesso.

³⁶ Una tale eguaglianza infatti comporterebbe: $3n = 2m - n$ e ciò è impossibile per il teorema di unicità di scomposizione di un intero in fattori primi.

chiude esattamente sulla nota di partenza: l'intervallo residuo è pari a un comma pitagorico. E infatti nel caso specifico questo succede perché:³⁷ $(3/2)^{12} \neq 27$.

Tutto questo per concludere in termini musicali che la consonanza di ottava non collima con la consonanza di quinta.

Insomma procedendo con la regola del 3^p.2^q accade che la nota di partenza e la nota d'arrivo formano coppie enarmoniche che i greci consideravano fortemente disarmoniche.³⁸

In particolare il Sold e il Mib producono una quinta particolarmente dissonante nota come la quinta del lupo per un noto fenomeno acustico indicato genericamente come "battimenti"³⁹ considerato dai più molto sgradevole.

10 - Archita e gli incommensurabili

Per ritornare ad un linguaggio meno contorto osservo come i pitagorici, dopo aver scoperto sperimentalmente come l'armonia, almeno quella ritenuta tale ai loro orecchi, richiedesse rapporti semplici, hanno successivamente constatato che l'idea di costruire suoni armonici con semplici rapporti aveva dei limiti insuperabili a causa della scoperta dell'incommensurabilità, una caratteristica che col linguaggio matematico si esprime come esistenza dei numeri irrazionali.

La scoperta che con i rapporti semplici non si fa molta strada ha avuto implicazioni pratiche e filosofiche relevantissime ed è necessario, anzi a parere dello scrivente indispensabile, puntualizzare l'argomento che purtroppo appare ignoto ovvero mal compreso anche da molti cosiddetti "esperti".

37 La differenza è stata chiamata quinta del lupo (sempre ad opera delle UCAS).

38 Cambiando la nota di partenza della scala cambia la posizione dei semitoni pitagorici, da ciò i Greci svilupparono vari modi musicali la cui denominazione deriva dalle regioni dell'antica Grecia nei quali essi hanno avuto origine: Ionico, Dorico, Frigio, Lidio, Misolidio, Eolio, Locrio.

39 Vedi la seconda parte di questo articolo.

Come ci racconta Aristotele nella *Metafisica* per i pitagorici tutto era numero e dunque ogni cosa andava riportata al numero, sia la regolarità dei fenomeni naturali sia i suoni.⁴⁰

Per i pitagorici, seguendo anche l'idea atomica di Democrito⁽⁴¹⁾, la materia era costituita di corpuscoli uguali fra loro, diremmo oggi punti-atomi, e questi punti materiali indivisibili erano le unità fondamentali del mondo fisico.

I pitagorici attribuivano così al *punto geometrico* una estensione, e ritenevano quindi i segmenti lineari formati da un numero finito di punti: il punto era insomma il sottomultiplo comune di tutti i segmenti e dunque tutti i segmenti dovevano risultare tra loro commensurabili.

Il rapporto tra due segmenti doveva corrispondere al rapporto tra i numeri interi che esprimevano quante volte il "punto" era contenuto in ognuno dei segmenti in questione, in altre parole ancora il rapporto tra le lunghezze di due segmenti era dunque il rapporto tra il numero intero dei "punti" contenuti nel primo segmento, sia n , e il numero intero di "punti" contenuti nel secondo segmento, sia m , cioè un rapporto pari alla frazione n/m , quella che oggi chiamiamo appunto *numero razionale* (da "ratio" = frazione).

La scoperta dell'esistenza dell'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato sconvolse la comunità scientifica di allora: comunque si frazioni il lato del quadrato, ottenendo dunque un sottomultiplo comunque piccolo, non è possibile misurare con quel sottomultiplo la diagonale, dunque l'ipotesi che ogni segmento sia formato da un numero intero di punti, comunque si vogliano piccoli, è insostenibile.

La scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili contraddiceva non solo le convinzioni filosofiche dei pitagorici, ma metteva anche in crisi il concetto di infinito della filosofia greca; non c'è da meravigliarsi perciò del fatto che fu proibito ai membri della

40 Così come confermavano i suoni armoniosi ricavati dal monocordo regolandone la lunghezza con proporzioni semplici

41 Il tema va ben oltre le finalità del testo, ma è il caso di notare che i recenti sviluppi della fisica mostrano come lo spazio e il tempo si comportino, a livello subatomico, come grandezze "granulari" e non continue.

setta di rivelare ad altri queste scoperte considerate blasfeme e sconcertanti, tant'è, almeno così si narra, che quando uno dei discepoli, Ippaso da Metaponto, divulgò il segreto, i pitagorici, non potendo confutare l'esistenza degli incommensurabili (numeri irrazionali), condannarono Ippaso a morire annegato.

A margine si può annotare che inizialmente il numero era la cosa più importante e per questo tutte le proprietà geometriche dovevano venire riportate a proprietà aritmetiche.

Inizialmente i pitagorici avevano identificato il numero con la geometria, dopo la scoperta degli incommensurabili questa identificazione si dimostrò, per loro, impossibile e la geometria venne ad acquisire una superiorità rispetto all'aritmetica (che prevedeva all'epoca solo l'uso di numeri frazionari cioè razionali) e non a caso la geometria segnò il periodo del più rigoglioso sviluppo della matematica greca.

Questa digressione colta per sottolineare che la scoperta degli incommensurabili ebbe non poche conseguenze anche nella teoria musicale pitagorica.

Il fatto è che date due note di frequenza f_1 ed f_2 , dunque la cui distanza è misurata dell'intervallo $k = f_1/f_2$, la nota equidistante dalle medesime, ha frequenza pari alla media geometrica delle frequenze stesse cioè pari a $\sqrt{f_1 \cdot f_2}$.

Ma $\sqrt{f_1 \cdot f_2}$, anche scegliendo per f_1 ed f_2 numeri interi piccoli, è quasi sempre un numero irrazionale che non può essere rappresentato da alcun rapporto di interi e che dunque non può essere realizzato sul monocordo da lunghezze ottenute dividendo il monocordo secondo rapporti semplici. In particolare se una nota ha frequenza 1 e l'altra nota ha frequenza 2 la nota equidistante ha frequenza $\sqrt{2}$: il famoso numero irrazionale che traduce l'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato.

Purtroppo $\sqrt{2}$ non rappresentò l'unico irrazionale scoperto dai pitagorici e fu Archita di Taranto a scoprire che anche numeri del tipo $\sqrt{2.3}$, $\sqrt{3.4}$, $\sqrt{4.5}$ erano irrazionali.⁴² L'irrazionalità di $\sqrt{f_1 \cdot f_2}$ rendeva

42 In generale si dimostra che è irrazionale il numero $\alpha = \sqrt{n \cdot (n+1)}$, la media geometrica dei numeri n ed $n+1$ che musicalmente rappresenta "l'intervallo musicale equidistante

impossibile per i pitagorici la costruzione di un suono armonico tra due suoni generati con rapporti semplici.⁴³

A proposito di Archita è sorprendente ed esaltante che Archita, per quello che si può dedurre da quanto resta dei suoi scritti e da quanto riportato da autori successivi, si propose di superare il problema, proponendo di dividere l'ottava in 12 semitoni. Affermò che l'ottava poteva essere divisa in 12 semitoni uguali ed indicò un divisore che ne consentisse la partizione, cioè un numero "prossimo" ad un terzo di pi greco (π).⁴⁴

La divisione dell'ottava a cui Archita pervenne è la seguente:

$$\pi / 3, \pi.4/11, \pi. 3/8, \\ \pi. 2/5, \pi.3/7, \pi.5/11, \pi.9/19, \pi / 2, \pi 7/13, \pi.4/7, \pi.3/5, \pi.7/11 .$$

Osservando che allora a π , rapporto tra la circonferenza e il diametro, veniva attribuito il valore (approssimato) 3,14, desta ammirazione prendere atto che il rapporto $3,14/3 = 1,0466$ non si discosta molto dal valore del semitono della scala equabile:

$$k = 1,0594630943592 .$$

da n ed $n+1$.

43 Archita (Taranto, 428 a.C. - Mattinata, 360 a.C.), un genio multiforme e straordinario e della Magna Grecia, pitagorico della seconda generazione, aveva colto compiutamente il problema dell'incommensurabilità. Archita dimostrò che la media geometrica di due interi piccoli successivi non era esprimibile come rapporto tra interi e dunque, relativamente alle conoscenze del tempo, non si poteva trovare.

44 π , pigreco, il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il diametro, per i greci valeva circa 3,14. In effetti pigreco è un numero trascendente e la dimostrazione della trascendenza è stata ottenuta da von Lindemann solo nel 1882.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale

<http://www.assculturale-arte-scienza.it>

Direttore Responsabile: Luca Nicotra

Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi

Redazione: Angela Ales Bello, Gian Italo Bischì, Luigi Campanella,

Isabella De Paz, Franco Eugeni, Maurizio Lopa, Paolo Severino Manca, Ezio Sciarra

Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN on-line 2385-1961