Pagaiando con Pitagora

Paolo Severino Manca*

DOI:10.30449/AS.v10n20.000

Ricevuto 16-11-2023 Approvato Pubblicato

Sunto: *Una "visione" sul mare elbano per riproporre la scoperta pitagorica dell'incommensurabilità e ricordare la grandezza della Magna Grecia.*

Parole Chiave: Incommensurabilità , Pitagora, Magna Grecia, Ippaso.

Abstract: *A "vision" of the Elban sea to re-propose the Pythagorean discovery of incommensurability and remember the greatness of Magna Graecia.*

Keywords: Incommensurability, Pythagoras, Magna Graecia, Hippasus.

Citazione: Manca P.S., *Pagaiando con Pitagora*, «ArteScienza», Anno X, N. 20, pp. 41-48, DOI:10.30449/AS.v10n20.000.

Il mio surfski in carbonio pesa 15 chili , è largo 53 cm lungo 580 cm, sulla fiancata ha impresso il nome Nirvana, costa troppo così come la pagaia anch'essa in carbonio, ma si vive così poco che qualche soddisfazione bisogna concedersela.

Lo uso in estate pagaiando lungo le coste elbane e, pagaiando e pagaiando penso a mille cose e i pensieri scorrono liberamente da prua a poppa e si dileguano come l'esile scia che lascio sull'acqua. E

* Già Professore Ordinario di Matematica Finanziaria all'Università di Pisa; paolo.severino.manca@gmail.com.

Fig. 1 - ...pagaiando pagaiando, mi è parso di scorgere lontano, in piedi su una tavola la sagoma del grande Pitagora.

tra i pensieri sono ricorrenti i riferimenti alla storia millenaria di questa isola Aethalia già percorsa da imbarcazioni antiche e da uomini antichi nati in questo glorioso Mediterraneo, uomini a cui devo la mia cultura, i miei valori , che dalle isole della Grecia sono giunti alle nostre coste e hanno fondato le colonie della Magna Grecia (Μεγάλη ‘Ελλάς) regalandoci lo spirito della ragione e quindi la filosofia, le arti figurative, la poesia, il teatro, la musica, la matematica.

È con questi pensieri che giorni addietro, pagaiando pagaiando, mi è parso di scorgere lontano, in piedi su una tavola (*stand up paddle surf*), la sagoma del grande Pitagora.

Mi è sovvenuto «l’eterno e le morte stagioni» e anche il suo dannato teorema.

Come noto l’enunciato del teorema afferma che un triangolo è rettangolo se e solo se l’area del quadrato costruito sull’ipotenusa è pari alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Per cui detti a e b i cateti e c l’ipotenusa risulta:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

Quello che modernamente conosciamo come teorema di Pitagora era già noto nell'enunciato ai Babilonesi, era conosciuto anche in Cina e sicuramente in India, come dimostrano molte scritture fra cui lo *Yuktibhāsā* e gli *Śulbasūtra* che risalgono all' VIII secolo a.C.

Elisha Scott Loomis, nel suo libro del 1927 *The Pythagorean Proposition*, elenca ben 371 differenti dimostrazioni del teorema .

Dunque un teorema importante, ma più importanti alcune conseguenze che hanno travalicato ampiamente il campo della matematica (a prescindere da tutti gli allievi bocciati nei secoli).

Infatti se consideriamo un triangolo rettangolo di cateti pari a 1, in base alla (1) essendo in questo caso $c^2 = 1^2 + 1^2$ si ha $c^2 = 2$, cioè $c = \sqrt{2}$: come dire che la diagonale di un quadrato di lato unitario misura $\sqrt{2}$.

Ora se ci fossero due numeri interi m ed n per cui vale la proprietà :

(2) $$m/n = \sqrt{2}$$

potremmo affermare che esiste un sottomultiplo del lato del quadrato (pari ad $1/n$) contenuto esattamente m volte nella diagonale.

Ma purtroppo m ed n non esistono e ciò significa che comunque si prenda piccolo un sottomultiplo del cateto (ovvero un lato del quadrato) non sarà possibile misurare con esso l'ipotenusa (ovvero la diagonale del quadrato).

Dunque a causa di Pitagora accade che $\sqrt{2}$ sia la misura dell'ipotenusa ma, contemporaneamente, che non esista nessuna coppia di interi per cui risulta : $m/n = \sqrt{2}$. (Rileggete e se avete del coraggio leggete anche la nota).[1]

Per i pitagorici, seguendo anche l'idea atomica di Democrito (e anche di Leucippo e Anassagora),[2] la materia era costituita da corpuscoli indivisibili, diremmo oggi punti-atomi, (ἄτομος : da ἀ

1 Se fosse $m/n = \sqrt{2}$, con m ed n senza fattori comuni, avremmo anche $m^2 = 2n^2$ e dunque m dovrebbe essere pari cioè $m = 2h$. Da $m^2 = 2n^2$ avremmo $(2h)^2 = 2n^2$ cioè $4h^2 = 2n^2$ cioè $2h^2 = n^2$ e dunque anche n dovrebbe essere pari, contro le ipotesi fatte (m ed n non hanno fattori comuni).

2 È praticamente impossibile distinguere le idee attribuibili a Democrito da quelle del suo maestro Leucippo.

privativo e τέμνω tagliare), che costituivano le unità fondamentali del mondo fisico.

Conseguentemente i pitagorici attribuivano al punto geometrico una estensione, e ritenevano quindi i segmenti formati da un numero finito di punti : il punto era insomma il sottomultiplo comune di tutti i segmenti e dunque tutti i segmenti dovevano risultare tra loro commensurabili.

Detto in altre parole il rapporto tra due segmenti doveva corrispondere al rapporto tra i numeri interi che esprimevano quante volte il "punto-atomo" era contenuto in ognuno dei segmenti in questione : il rapporto tra le lunghezze di sue segmenti era dunque il rapporto tra il numero intero dei "punti-atomi" contenuti nel primo segmento, sia *m*, e il numero intero di "punti-atomi" contenuti nel secondo segmento, sia *n* , cioè un rapporto pari alla frazione *m/n*, quello che oggi chiamiamo numero razionale da "*ratio*" = frazione.

La scoperta dell'incommensurabilità del lato del quadrato con la diagonale fu sconvolgente per i pitagorici.

Per loro infatti gli elementi e le proprietà dei numeri erano gli elementi costitutivi delle cose e l'universo intero era, sul modello della musica, numero e armonia.

Non per nulla, tramandano le testimonianze, che, per l'armonia e l'ordine che egli vedeva in tutte le cose, Pitagora fu il primo a chia-

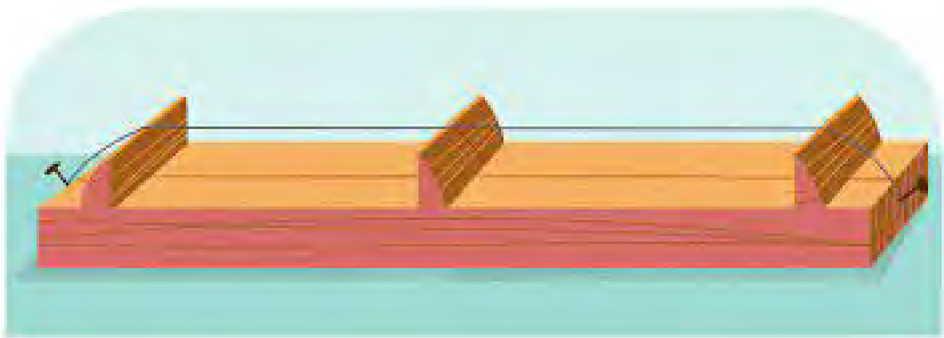

Fig. 2 - Monocordo pitagorico.

Fig. 3 - Da: Gaffurius, *Theorica musicae – Pitagora studiando l'armonia e la ratio con diversi strumenti musicali,* 1492.

mare l'universo "cosmo", parola che in greco significava "ordine".

Sintetizzando, per i pitagorici il numero era la cosa più importante e per questo tutte le proprietà geometriche dovevano venire riportate a proprietà aritmetiche. Dopo la scoperta degli incommensurabili questa identificazione si dimostrò, per loro, impossibile e la geometria venne ad acquisire una superiorità rispetto all'aritmetica e non a caso la geometria segnò il periodo del più rigoglioso sviluppo della matematica greca.

Ma le sconvolgenti conseguenze del teorema di Pitagora si estesero anche al mondo della musica.

Nella visione pitagorica, la musica aveva un ruolo assai rilevan-

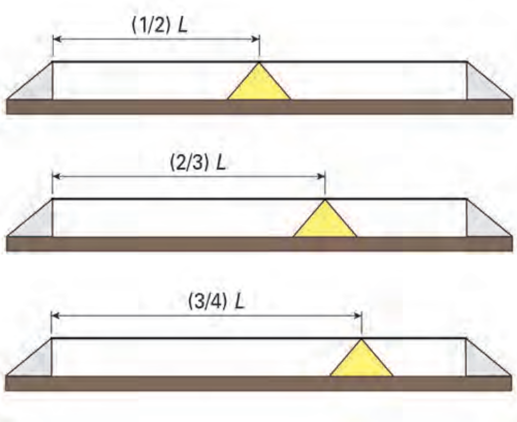

Fig. 4 - Monocordo pitagorico: il rapporto tra le misure delle porzioni della corda è espresso da una frazione costituita dai numeri 1,2,3,4,

te: rappresentava l'armonia invisibile del mondo e le relazioni tra i suoni imitavano l'evoluzione delle sfere celesti, l'energia dell'anima universale e l'ordine interno di ogni singolo individuo, scintilla sulla terra dell'anima universale.

Come riportato anche da Aristotele nella *Metafisica,* per i pitagorici tutto era numero e dunque ogni cosa andava riportata al numero, sia la regolarità dei fenomeni naturali sia i suoni.

I pitagorici verificarono che l'armonia musicale è strettamente legata ai rapporti numerici che sussistono tra certe grandezze misurabili sullo strumento che produce i suoni.

Le consonanze fra i suoni furono studiate dai pitagorici analizzando i suoni prodotti dal monocordo, uno strumento costituito da una corda tesa tra due estremi fissi, al di sotto della quale scorre liberamente un ponticello mobile che divide la corda in due segmenti di lunghezza variabile. Ascoltando il suono prodotto dalle varie porzioni di corda, secondo i pitagorici si otteneva un suono consonante solo quando il rapporto tra le misure di tali porzioni risultava espresso da una frazione costituita dai numeri 1,2,3,4, che avevano oltretutto un significato esoterico rilevantissimo.[3]

3 Nell'*Aritmosofia p*itagorica la Monade (numero 1) rappresenta la Ragione, l'Uno, il principio primo, è considerato impari cioè né pari né dispari e geometricamente rap-

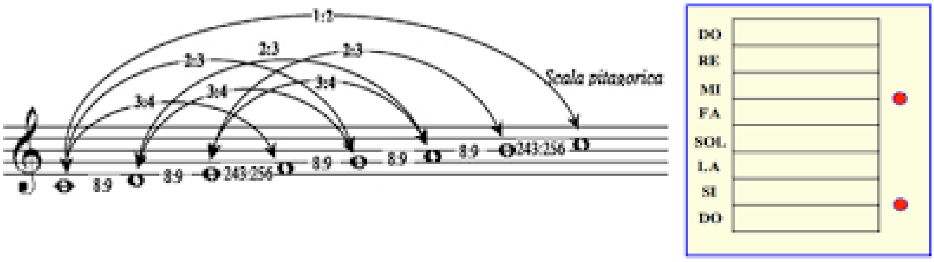

Fig. 5 - La scala pitagorica.

I pitagorici ragionavano in termini di lunghezza della corda ma, poiché nel monocordo le frequenze risultano inversamente proporzionali alle lunghezze, traducendo la scoperta in termini moderni di note musicali e di frequenze, i pitagorici trovarono che due note risultavano armoniche quando il rapporto delle loro frequenze risultava espresso da una frazione costituita dai numeri 1,2,3,4 .

Date due note armoniche si trattò allora di costruire una nota armonica intermedia cioè di trovare la corrispondente lunghezza della porzione di corda ovvero, in termini moderni, della corrispondente frequenza. Ahimè anche in questo caso ricomparve il problema della incommensurabilità.[4]

La scoperta viene attribuita ad Archita ,(Taranto, 428 a.C. – Mat-

presenta il punto. La Diade (numero 2) rappresenta la parte femminile, l'indefinito e illimitato, l'opinione (sempre duplice) e geometricamente la linea. La Triade (numero 3) rappresenta la parte maschile, il definito e limitato e geometricamente il piano. La Tetrade (numero 4) rappresenta la giustizia in quanto divisibile equamente da entrambe le parti. La Pentade (numero 5) rappresenta lo sposalizio poiché è la somma della parte femminile (2) e maschile (3), simboleggia la vita e il potere; il pentagramma è il simbolo dei pitagorici. La Decade (numero 10) è il numero perfetto, la fonte e radice dell'eterna natura perché il 10 "contiene" l'intero universo essendo la somma di 1,2,3 e 4; esso veniva rappresentato con la *tetractys*, il triangolo equilatero di lato 4, sul quale veniva fatto il giuramento di adesione alla scuola pitagorica.

4 In formule se f_1 ed f_2 sono le frequenze dei suoni di partenza, frequenze che sono inversamente proporzionali alla lunghezza del tratto di corda, allora la frequenza del suono intermedio è pari alla radice quadrata del prodotto $f_1 x f_2$: si tratta della media geometrica di f_1 ed f_2. Per approfondimenti si veda : "*i temperamenti musicali senza le ucas*" di Paolo Manca.

tinata, 360 a.C.), che dimostrò che la media geometrica di due interi piccoli successivi non era esprimibile come rapporto tra interi e dunque, relativamente alle conoscenze del tempo, non si poteva trovare.

Il disorientamento provocato dalla scoperta degli incommensurabili portò alla proibizione ai membri della setta pitagorica di rivelarla ad altri e la leggenda narra che quando uno dei discepoli, Ippaso da Metaponto, divulgò il segreto, i pitagorici, non potendo confutare l'esistenza degli incommensurabili, fecero annegare Ippaso nel mare di fronte a Crotone.

Con questi pensieri, pagaiando pagaiando, capii che era giunta l'ora di sapere qualcosa in più sulla sorte di Ippaso che a me è sempre apparso simpaticissimo, e dunque, pagaiando pagaiando, ho cercato di raggiungere l'uomo sulla tavola per interrogarlo in merito: ormai ne ero certo si trattava di Pitagora, o comunque di un parente stretto.

Aumentai l'andatura ma l'uomo sulla tavola, come raggiunto da un presentimento, cambiò direzione e infittì i colpi. Più veloce io, sempre più veloce lui …Instancabile pagaiava come un dannato e alla fine ho dovuto desistere ….

Da quel giorno mentre navigo col mio Nirvana, scruto continuamente invano l'orizzonte: di Pitagora nessuna traccia. E tuttavia sono certo che sia rimasto nei dintorni e se dunque vi capitasse di incontrarlo vi prego, avvisatemi: ha la barba grigia e fluente, abbronzato, con un perizoma succinto, e , non vi potete sbagliare, viaggia sulla tavola pitagorica.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Redazione: Angela Ales Bello, Gian Italo Bischi, Luigi Campanella, Antonio Castellani, Isabella De Paz, Maurizio Lopa
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN on-line 2385-1961