Platone e la matematica

Parte II

Antonio Fontana* Agnese Ilaria Telloni** Carlo Toffalori***

DOI:10.30449/AS.v8n15.137

Ricevuto 6-11-2020 Approvato 17-11-2020 Pubblicato 30-06-2021

La prima parte di questo articolo è stata pubblicata in «ArteScienza» N. 14.

Sunto: *Esaminiamo e commentiamo la matematica presente nel pensiero e nell'opera di Platone, nella prospettiva di un laboratorio per docenti e studenti delle scuole superiori.*

Parole Chiave: segmenti incommensurabili, solidi platonici, scala del Timeo, numero nuziale.

Abstract: *We examine and comment on the mathematics present in Plato's thought and work. We address in particular high school teachers and students.*

Keywords: incommensurable segments, Platonic solids, Timaeus scale, nuptial number.

Citazione: Fontana A., Telloni A. I., Toffalori C., *Platone e la matematica. Parte II*, «ArteScienza», Anno VIII, N. 15, pp. 63-102, DOI: 10.30449/AS.v8n15.137.

* Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; antonio.fontana@unicam.it .
** Università Politecnica delle Marche, Ancona, Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche; agneseilaria.telloni@univpm.it .
*** Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; carlo.toffalori@unicam.it .

5 - I solidi platonici

Dai libri di geometria apprendiamo che un solido platonico è un poliedro regolare, cioè un poliedro convesso le cui facce:

- sono poligoni regolari[8] convessi tutti uguali tra loro;
- se distinte, si intersecano al più negli spigoli;
- concorrono in numero al più finito in ogni vertice.

Dunque i solidi platonici costituiscono l'equivalente tridimensionale di quelli che nel piano sono i poligoni regolari. Con una differenza sostanziale, però: che di questi ultimi (a meno di similitudini) ce n'è uno per ogni possibile numero $N \geq 3$ di vertici e lati, in dettaglio un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono regolare, un esagono regolare eccetera; mentre di solidi platonici ne esistono soltanto 5. "Pochi in modo irritante", avrebbe commentato Lewis Carroll (1832-1898), secondo quanto riferito da Martin Gardner (1914-2010) nel capitolo dedicato all'argomento in (Gardner, 1987, p. 13). A ogni modo i solidi in questione sono, nell'ordine (figura 1):

1. *tetraedro*: 4 facce (triangoli equilateri), 4 vertici e 6 spigoli;
2. *esaedro o cubo*: 6 facce (quadrati), 8 vertici e 12 spigoli;
3. *ottaedro*: 8 facce (triangoli equilateri), 6 vertici e 12 spigoli;
4. *dodecaedro:* 12 facce (pentagoni regolari), 20 vertici e 30 spigoli;
5. *icosaedro*: 20 facce (triangoli equilateri), 12 vertici e 30 spigoli.

A scoprirli sarebbero stati i pitagorici (o forse già gli egiziani) nei primi tre casi e Teeteto (o forse già i pitagorici) per il dodecaedro e l'icosaedro. Ma la più antica descrizione che di essi ci è pervenuta, verosimilmente tratta proprio da Teeteto, ci è proposta da Platone in uno dei dialoghi più famosi e complessi, il *Timeo*.[9] È questo il motivo della denominazione con cui questi poliedri sono oggi conosciuti.

Della loro deprecabile penuria esistono spiegazioni relativamente

8 Un poligono (convesso) è regolare se ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali.

9 Per tutte le opere di Platone rimandiamo ancora a (Platone, 2000).

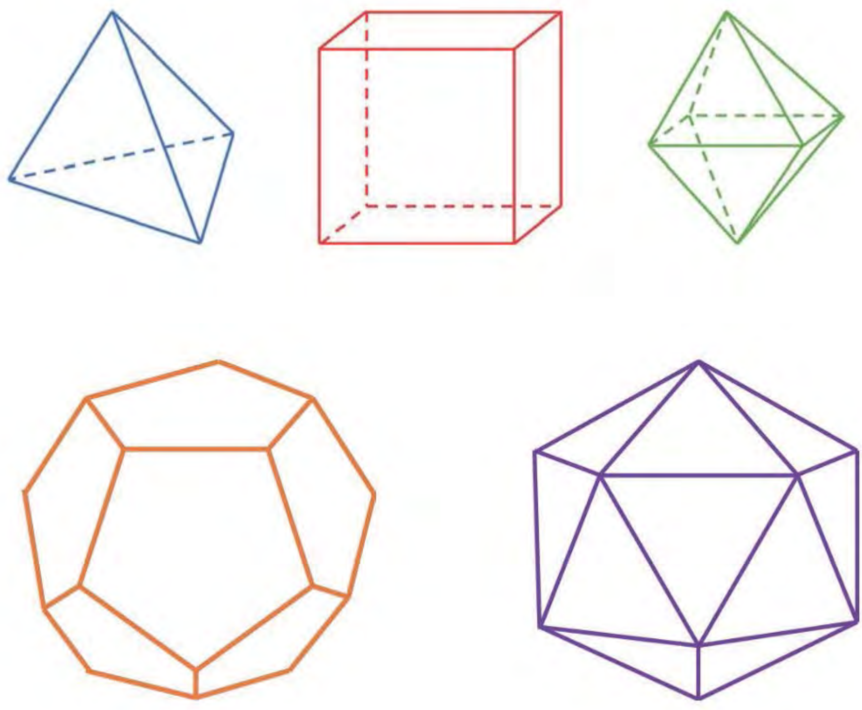

Fig. 1 - Tetraedro - Esaedro - Ottaedro - Dodecaedro - Icosaedro.

semplici, accessibili pure agli studenti di un liceo. Le troviamo già espresse nel libro XIII degli *Elementi* di Euclide (1988), che dopo aver introdotto i 5 solidi nelle proposizioni dalla 13 alla 17, in quella successiva, ossia la 18, esclude esempi ulteriori.

Esaminando lo sviluppo piano di un poliedro regolare, si deduce infatti che la somma degli angoli al vertice dei poligoni regolari che concorrono in uno stesso vertice non può superare un angolo giro: 2π radianti, ovvero 360 gradi.

Attorno a ogni vertice si concentrano evidentemente almeno 3 facce. Ciascuna di esse ammette allora un angolo interno inferiore a $2\pi/3$ ovvero a 120 gradi.

Sappiamo poi che la somma degli angoli interni di un poligono regolare di N ≥ 3 lati è $(N-2)\,\pi$, così che ogni singolo angolo interno del poligono misura $(N - 2)\, \pi\, /N$.

Quindi deve essere $(N - 2)\, \pi\, /N < 2\pi/3$, da cui, dividendo per π, si ricava $(N - 2)\, /N < 2/3$, cioè $3N - 6 < 2N$ e, in definitiva, $N < 6$.

La conclusione è che ciascuna faccia di un poliedro regolare deve avere un numero di lati e di vertici inferiore a 6, e quindi compreso fra 3 e 5. Si distinguono di conseguenza tre casi:

1. Le facce sono triangoli equilateri. I loro angoli interni misurano perciò $\pi/3$ radianti, cioè 60 gradi. Siccome la somma degli angoli interni delle facce concorrenti in un vertice deve restare sotto alla soglia di $2\pi = 6\pi/3$, dobbiamo prevedere meno di 6 facce per vertice: quindi o 3, o 4, o 5, casi che corrispondono rispettivamente a tetraedro, ottaedro e icosaedro regolari.
2. Le facce sono quadrati. Un angolo interno ora misura $\pi/2$, cioè 90 gradi. Il ragionamento precedente impone stavolta 3 facce per ogni vertice (infatti $3\pi/2 < 2\, \pi < 4\pi/2$) e conduce in definitiva al cubo.
3. Finalmente assumiamo che le facce siano pentagoni regolari, con angoli interni dell'ampiezza di $3\pi/5$ ossia 108 gradi. Neppure in questo caso si possono prevedere più di 3 facce concorrenti in un vertice (perché $9\pi/5 < 2\, \pi < 12\pi/5$). È la situazione del dodecaedro regolare.

Al netto di qualche ulteriore minimo dettaglio da precisare, si ha quindi la conferma che i solidi platonici esauriscono tutti i poliedri regolari. Il disegno degli sviluppi piani dei 5 solidi può aiutare a comprendere meglio il precedente argomento (figura 2). Proponiamo i vari poliedri in base al numero (crescente) delle loro facce, dal tetraedro all'icosaedro. Si presti attenzione, in particolare, alla somma degli angoli interni delle facce concorrenti in un vertice (il relativo angolo è indicato in grigio).

Ma veniamo al *Timeo*. Platone vi presenta i 5 solidi all'interno del racconto emozionante della cosmogonia, cioè della creazione del mondo, venato peraltro di tantissimi altri riferimenti aritmetici e geometrici. Ne proporremo un resoconto esteso nel prossimo capitolo. Anticipiamo però qui gli spunti che ai poliedri regolari

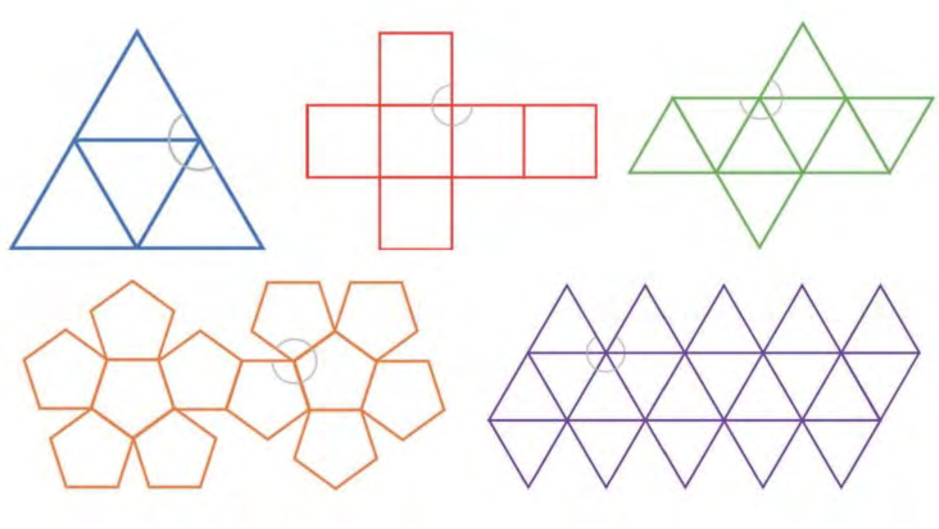

Fig. 2 - Sviluppo in piano dei solidi platonici.

maggiormente si collegano. A narrare il tutto è proprio il Timeo del titolo, del quale in verità, a prescindere dal dialogo platonico, non ci sono pervenute grandi notizie, se non che fu probabilmente filosofo pitagorico del V secolo a. C.

Narra dunque Timeo che a plasmare il cosmo è stato il dio Demiurgo. Si discute se questi possa intendersi come un artigiano esecutore, seppure «il più nobile degli artefici», o se non rappresenti addirittura il *noûs* divino e l'idea stessa del Bene (*Timeo*, 29 a). Come che sia, c'è un modello ideale ed eterno cui lui si ispira per costruire il mondo come «la più bella delle creature», «al riparo dalla vecchiaia e dal deperimento». A questo modello l'universo deve pure la sua forma sferica: è infatti «arrotondato come un cerchio», che è «la figura più perfetta di tutte e più simile a se stessa», perché «la somiglianza [è] indefinitamente più bella della dissomiglianza» (33 a-c).

Ora, il nostro universo deve essere anche corporeo, visibile e tangibile. Così il Demiurgo (31 b-32 c) decide di comporlo inizialmente con due elementi:

- il *fuoco*, cioè l'energia, la luce, senza cui nulla di visibile esiste,
- la *terra*, che è invece simbolo della materia, senza cui nulla di tangibile può esserci.

Ma due elementi da soli non bastano. Occorre chi li bilanci e accordi. Interviene qui nuovamente il gusto dell'armonia geometrica delle cose: "il legame più bello", infatti, si realizza con le proporzioni, inserendo quindi tra fuoco e terra termini intermedi. Questi devono essere almeno due, perché l'universo è tridimensionale. Ecco allora che si generano altri elementi, aria e acqua, tali da formare appunto la duplice proporzione

$$\text{fuoco} : \text{aria} = \text{aria} : \text{acqua} = \text{acqua} : \text{terra}$$

che li mette tutti in equilibrio.

I solidi geometrici intervengono a questo punto. Afferma infatti Timeo che, costituiti i 4 elementi, il Demiurgo «li adornò di forme e numeri, sottraendoli alla loro condizione di disordine» (*Timeo* 53 b). Il dio infatti è «un perpetuo geometra», «geometrizza sempre» – la celebre frase attribuita a Platone da Plutarco.[10]

A distanza di secoli, Gauss avrebbe soggiunto, e noi potremmo qui ripetere, pure che «il dio aritmetizza sempre» (Ferreirós, 2007, pp. 235-237).

I solidi platonici sono associati ai 4 elementi e all'universo stesso per rappresentarli. Il collegamento avviene come segue (53 c-56 d). Si muove dalla considerazione che fuoco, terra, aria e acqua, in quanto forme corporee, sono dotate di spessore e quindi, inevitabilmente, limitate da superficie piane.[11] Queste a loro volta si possono triangolare, cioè tassellare con triangoli, e addirittura con triangoli rettangoli. Infatti ogni triangolo si può scomporre, in riferimento a una delle sue altezze, come la somma o la differenza di due triangoli rettangoli. Platone distingue questi ultimi in due tipi:

10 Nelle *Quaestiones Convivales* (Plutarco, 2017, *Moralia*, VIII 2, 718 c).

11 Platone aveva già chiamato nel *Menone*, 76 a, "*figura*" (da intendersi, sembrerebbe, proprio come *superficie)* il limite di un solido. Euclide definirà poi *superficie* proprio come "*limite del solido*" nel libro XI degli *Elementi*.

1. quello isoscele, che già conosciamo come il semiquadrato, nel quale dunque il rapporto tra l'ipotenusa e ciascuno dei cateti è $\sqrt{2}$ (figura 3a);
2. i tanti triangoli rettangoli scaleni, tra i quali però uno è degno di particolare attenzione, e anzi il più bello, cioè la metà di un triangolo equilatero: in esso il cateto minore è la metà dell'ipotenusa e di conseguenza l'altro cateto ha con la stessa ipotenusa rapporto $\sqrt{3}/2$ (figura 3b).

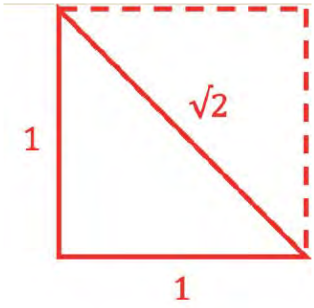

Fig. 3a

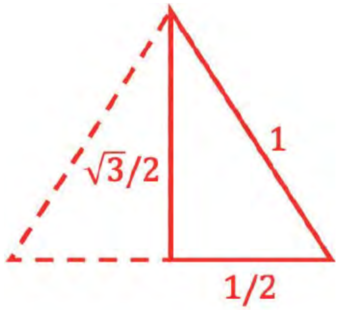

Fig. 3b.

Platone propone un secondo metodo, più elaborato, per costruire un triangolo equilatero a partire da quest'ultimo triangolo rettangolo, prendendone sei copie uguali e disponendole attorno a un vertice comune: il punto di incontro tra ipotenusa e cateto minore (figura 4).

Ma, quale che sia la strategia con cui i triangoli equilateri sono

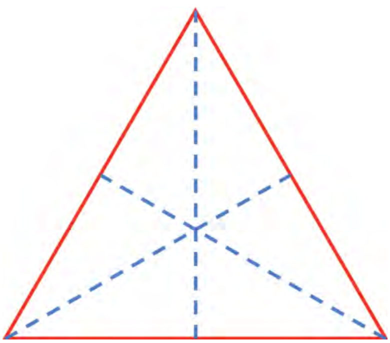

Fig. 4.

costruiti, tre poliedri regolari distinti si generano a partire da essi, nel modo che già sappiamo:

1. il tetraedro, che per Platone corrisponde al fuoco;
2. l'ottaedro, che rappresenta l'aria;
3. l'icosaedro, che simboleggia l'acqua.

Ognuno dei tre elementi si collega infatti, in ragione delle sue caratteristiche di mobilità, leggerezza, acutezza (dunque, in ordine crescente, dal fuoco all'acqua), al solido che ha il minor numero di facce. La comune origine costituita dal triangolo equilatero si riflette proprio in questo, che i tre elementi possono trasformarsi l'uno nell'altro, l'acqua nell'aria evaporando, eccetera.

Uno solo invece è l'elemento che si congiunge al cubo, e quindi al triangolo semiquadrato: la terra, che allo stesso modo è immobile e plastica, e in nessun modo può nascere dagli altri elementi, o partorirli.

Platone discute poi delle possibili reazioni e interazioni tra terra e fuoco, o tra acqua e fuoco, e così via, adoperando argomentazioni aritmetiche per arrivare a conclusioni che oggi diremmo semmai di chimica. Non ci soffermiamo su questa sua analisi, ormai superata. Sottolineiamo però come questo passo del *Timeo* fornisca una delle testimonianze più antiche della scienza chimica nel mondo ellenico (Weil, 2014, p. 323).

Consideriamo adesso l'ultimo dei solidi platonici, l'unico rimasto finora escluso, cioè il dodecaedro. Secondo Platone esso è immagine addirittura dell'intero cosmo. Due possono essere i motivi di questo collegamento:

1. forse il fatto che le facce del dodecaedro, cioè i pentagoni regolari, sono capaci di riprodursi attraverso i poligoni racchiusi tra le proprie diagonali, inducendo un processo di antanairesi già osservato dai pitagorici (figura 5);
2. soprattutto la constatazione che il dodecaedro meglio approssima la perfezione della sfera e più contribuisce ad abbellire l'universo.

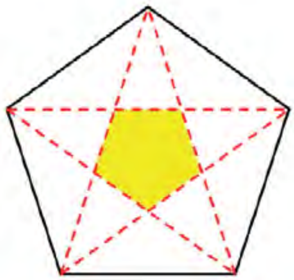

Fig. 5 - I pentagoni regolari sono capaci di riprodursi attraverso i poligoni racchiusi tra le proprie diagonali.

A questo proposito, già nel *Fedone*, 110 b, Socrate aveva affermato che «qualora si potesse osservare la terra dall'alto, essa avrebbe l'aspetto di una di quelle variopinte palle di cuoio a dodici spicchi», i dodecaedri appunto, e aggiunto che queste facce sarebbero «ciascuna di colore diverso, rispetto ai quali i colori di questo mondo, quelli impiegati dai pittori, sono come delle semplici imitazioni».

I solidi platonici sono tema affascinante, e molto si potrebbe aggiungere a loro riguardo nel nostro ideale laboratorio, anche a prescindere dal *Timeo*.

Ad esempio, da un punto di vista geometrico, può colpire la scoperta che, ove si prenda uno di questi solidi e si formi il suo *duale*, si costruisca cioè il poliedro che ha vertici nei centri delle facce del solido dato e spigoli che congiungono i centri di facce adiacenti, allora:

- cubo e ottaedro si generano reciprocamente (figura 6);
- così come dodecaedro e icosaedro;
- mentre il tetraedro è duale di se stesso, cioè si riproduce direttamente (figura 7).

Sempre dal punto di vista geometrico, si potrà notare come ogni solido platonico sia perfettamente individuato precisando:

- il numero p di spigoli (equivalentemente di vertici) su ogni faccia;
- il numero q di facce (o di spigoli) che si incontrano in un vertice.

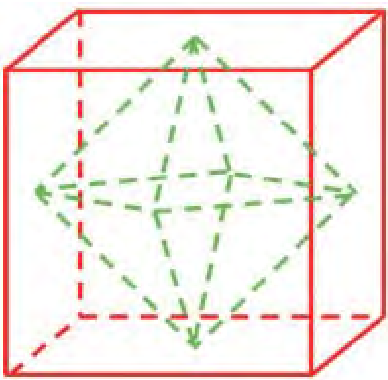

Fig. 6 - Cubo e ottaedro si generano reciprocamente come duali l'uno dell'altro.

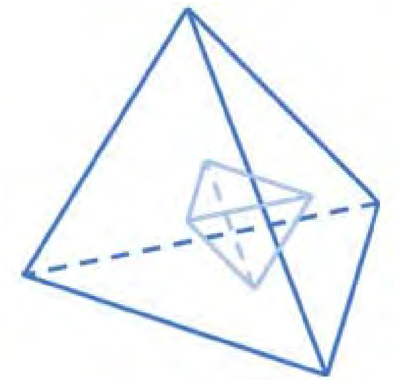

Fig. 7 - Il tetraedro si genera come duale di se stesso.

La coppia {*p*, *q*} si chiama *simbolo di Schläfli*, in onore del matematico svizzero Ludwig Schläfli (1814-1895). Per tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro, questo simbolo coincide rispettivamente con {3, 3}, {4, 3}, {3, 4}, {5, 3}, {3, 5}. Gli studenti potranno forse divertirsi a calcolarlo, come pure sorprendersi apprendendo che Schläfli fu capace di classificare (e descrivere negli stessi termini) perfino i così detti *politopi regolari*, cioè gli equivalenti dei poligoni regolari e dei solidi platonici in dimensioni superiori a 3. Oggetti geometrici strani ed esotici, difficili da vedere e toccare, eppure accessibili agli occhi della mente; inimmaginabili forse a Platone ed Euclide, eppure vivi nei loro successori – la matematica va sempre oltre. Si scopre poi che, di questi politopi regolari, ce ne sono 6 in dimensione 4 e solo 3 in tutte le dimensioni da 5 in su. Raccomandiamo (De Lellis, 2017) come bella introduzione a questi temi.

La connessione tra poliedri regolari e struttura dell'universo fu ripresa molti secoli dopo Platone da Giovanni Keplero (1571-1630), che si ispirò al *Timeo* per concepire una complessa costruzione astronomica, quella che Dio avrebbe seguito nella creazione. La troviamo esposta nel *Mysterium cosmographicum*, opera pubblicata nel 1596.[12] I 6 pianeti allora conosciuti – nell'ordine, procedendo dal più piccolo

12 https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-445 .

al più grande, Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno – corrisponderebbero in questa visione ai 5 solidi platonici. Per ognuno dei pianeti si considera infatti la sfera che ne contiene l'orbita. A partire poi dalla sfera dalla Terra, che viene assunta «misura di tutte le altre» e fa dunque da riferimento, si afferma quanto segue:

- il dodecaedro che la circoscrive si inscrive nella sfera di Marte, e allo stesso modo il tetraedro attorno a Marte genera la sfera di Giove e il cubo attorno a Giove la sfera di Saturno;
- al contrario, l'icosaedro inscritto nella sfera della Terra circoscrive la sfera di Venere, e l'ottaedro intorno a Venere corrisponde finalmente alla sfera di Mercurio.

L'argomento include anche considerazioni sui valori numerici dei raggi delle orbite e delle distanze tra pianeti, combinando l'analisi scientifica con considerazioni astrologiche, cabalistiche e metafisiche. Secondo Keplero, che poi però lo accantonò, spiega anche perché i pianeti sono esattamente 6. Quindi il discorso è chiaramente superato, non fosse altro che per i nuovi pianeti che da allora sono stati scoperti. Mantiene però un suo fascino.

Del resto a rinnovare la descrizione dei solidi platonici in epoca rinascimentale, dunque già prima di Keplero, erano stati altri nomi famosissimi, come Piero della Francesca (1416/1417-1492), che dedicò loro un trattato (Piero della Francesca, 1995), e Luca Pacioli (1447-1517), che ne parlò nel *De divina proportione* (Pacioli, 2010), affidandosi addirittura a Leonardo da Vinci (1452-1519) per raffigurarli (suggeriamo di recuperare sulla rete questi disegni).

Le loro trattazioni prescindono da considerazioni filosofiche e astronomiche e si concentrano sull'aspetto geometrico, che si allaccia poi in modo naturale alla finalità pittorica.

I collegamenti dei solidi platonici con l'arte si sono arricchiti nei secoli successivi, fino ai tempi recenti, relativamente ai quali citiamo:

1. Maurits Cornelis Escher (1898-1972), che per esempio nella litografia *Cascata* raffigura l'intreccio di poliedri alla sommità delle due torri da cui sale e scende il flusso dell'acqua (a sinistra, la

composizione di 3 cubi, a destra la stella ricavata da 3 ottaedri non regolari, conosciuta proprio come *solido di Escher*);
2. oppure Salvador Dalì (1904-1989) che ambienta in un dodecaedro il suo dipinto della *Ultima cena*;
3. o ancora Lucio Saffaro (1929-1998), che ai poliedri regolari ha dedicato una gran varietà di opere pittoriche e grafiche.[13]

Si diceva della diffidenza di Platone verso gli artisti, poeti o pittori. Ma questi ultimi non sembrano ripagarlo della stessa moneta, e al contrario gli tributano il loro omaggio.

Ricordiamo finalmente che Martin Gardner propone nel primo capitolo di (Gardner, 1987) varie maniere fantasiose e divertenti (ma talora impegnative) per costruire i solidi platonici con la carta e altri semplici strumenti: altrettante idee da esplorare e, perché no, provare a realizzare nel laboratorio.

6 - La scala del *Timeo*

Riprendiamo il racconto cosmogonico del Timeo, per commentarne i punti di interesse in campo non solo geometrico e astronomico, ma anche musicale. Una spiegazione più dettagliata e approfondita di tutti gli aspetti matematici della creazione secondo Platone si può trovare sul sito Polymath, *Il modello del cosmo platonico* (*lo spartito della creazione*).[14]

Prima di comporre i 4 elementi costitutivi dell'universo, il Demiurgo ne crea l'anima e il corpo (*Timeo*, 35 b-c, 36 d-37 b), la prima prioritariamente all'altro, perché essa deve comandare e quello obbedire. Per questo il dio si affida a due sostanze contrapposte, una indivisibile, inalterabile, sempre medesima, «partecipe di ragione e

13 Per le quali rimandiamo al sito https://www.fondazioneluciosaffaro.it . I due dipinti di Escher e Dalì sopra citati si trovano invece rispettivamente sui siti https://mcescher.com/gallery/impossible-constructions/#iLightbox[gallery_image_1]/5 e https://www.salvador-dali.org/ca/obra/cataleg-raonat-pintures/obra/719/el-sagrament-del-sant-sopar .

14 https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Giugno_03/Cap3.html .

armonia», l'altra corporea e divisibile (l'altro, il diverso), e le combina generandone una terza: l'essenza. Dalla loro composizione enuclea poi porzioni successive, che stanno in rapporto alla prima secondo la progressione dei sette numeri 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27. Si noti come questa sequenza consista delle due così dette quaterne pitagoriche, corrispondenti rispettivamente ai primi 4 elementi delle serie geometriche di ragione 2 e 3, dunque 1, 2, 4, 8 e 1, 3, 9, 27. Si osservi anche come l'ultimo elemento della progressione, cioè 27, è la somma dei precedenti, 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9. In effetti Platone vuole evidenziare, in linea con la sensibilità e il credo pitagorici, che l'anima del mondo si genera secondo rapporti aritmetici precisi.

I sette numeri, nell'ordine in cui sono presentati, corrispondono poi ai *"pianeti"* allora riconosciuti, dunque Luna, Mercurio, Venere, Sole, Giove, Marte e Saturno, in base al calcolo che a quel tempo si faceva dei rapporti delle loro distanze dalla terra.

L'opera del *Demiurgo* prosegue, imprimendo alla struttura sin qui formata un movimento basato su un gioco di numeri e cerchi rotanti. Ma preferiamo a questo punto trascurare i dettagli cosmogonici e astronomici per concentrarci sull'aspetto musicale che, ancora ispirato alla tradizione pitagorica, vi è sotteso.

Infatti, nel celebre passo che segue, Platone fa chiaro riferimento alla scala pitagorica, e anzi la descrive. Ecco le sue parole (36 a-b):[15]

> E poiché dalla relazione fra questi intervalli provenivano altri intervalli di una volta e mezzo [dunque 3/2, n.d.A.], una volta più un terzo [4/3 n.d.A.] e una volta più un ottavo [cioè 9/8 n.d.A.], il dio colmò tutti quelli di una volta più un terzo [4/3 n.d.A.] con l'intervallo di una volta più un ottavo [9/8], lasciando all'interno di ciascuno di essi una frazione definita dal rapporto numerico fra 256 e 243. E così la mescolanza da cui egli sottraeva questi intervalli era ormai completamente esaurita.

Vedremo tra breve il significato dei numeri che compaiono in queste righe, inclusi 256 e 243. Ma sottolineiamo sin da ora come il passo platonico costituisca la prima testimonianza scritta a noi pervenuta della scala musicale ideata appunto dai pitagorici – chiamata

15 n.d.A.= nota degli Autori.

anche, per questo motivo, la scala del *Timeo*.

Conviene allora che apriamo una parentesi per presentarla. Facciamo perciò riferimento a un monocordo, cioè a uno strumento formato da un'unica corda tesa tra due estremi e da un ponticello scorrevole che può dividerla in due parti di lunghezza variabile. In termini moderni possiamo pensare a un violino con una sola corda ed a un dito che la comprime, separandola in due parti, mentre un secondo dito la pizzica nella sua parte superiore. L'intuizione dei pitagorici fu che l'altezza del suono prodotto in questo modo, dunque di una nota, è proporzionale alla lunghezza della parte superiore della corda. Anzi, al loro orecchio, la consonanza di due suoni riusciva tanto più gradevole quanto più semplici erano i rapporti numerici formati dalle relative lunghezze.

Per esempio, se per *do* intendiamo il suono che si produce lasciando vibrare la corda libera:

- facendone vibrare solo la metà (effetto che si realizza premendola nel mezzo e poi pizzicandola), si ottiene il *do* dell'ottava superiore – che denotiamo qui con *do*+,
- il *sol* – consonante col *do* – corrisponde ai 2/3 della lunghezza,
- il *fa* – analogamente consonante col *do* – ai 3/4.

Oggi si parla di:

- *rapporto di ottava* per *do* e *do*+, dunque 1 : 2 da *do* a *do*+ e 2 : 1 viceversa,
- *rapporto di quinta* per *do* e *sol*, oppure *fa* e *do*+, quindi 2 : 3 nel senso appena indicato e 3 : 2 in quello inverso,
- *rapporto di quarta* per *do* e *fa*, oppure *sol* e *do*+, quindi 3 : 4 nel senso appena indicato e 4 : 3 in quello inverso.

Colpì i pitagorici che i numeri così coinvolti, dunque 1, 2, 3 e 4, hanno somma 10. Li chiamarono a comporre la loro sacra *tetraktýs* (figura 8).

Ma soprattutto, come rileva Simone Weil in (Weil, 2014, p. 270), essi si stupirono di scoprire nella natura, specificamente nei suoni, questi rapporti numerici, che di conseguenza ritennero «un marchio, un sigillo della verità suprema».

È il caso di ribadire che la differenza tra due intervalli corrisponde al rapporto delle rispettive lunghezze, e non alla loro sottrazione. Per esempio la differenza tra quinta e quarta è uguale a 3/2 : 4/3 = 9/8. Si chiama allora *tono* la differenza tra quinta e quarta, corrispondente a 9/8 di corda. Un *semitono* è invece la differenza tra quarta e due toni, quindi il duplice quoziente (4/3 : 9/8) : 9/8 = = 256/243 (che spiega la comparsa dei numeri 256 e 243 menzionati da Platone

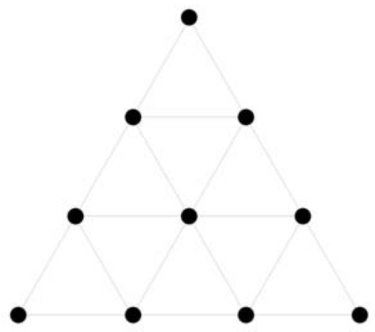

Fig. 8 - Tetraktýs.

nel passo sopra citato).

Un'analisi dei suoni indusse a strutturare l'intera scala, da *do* al *do*+ dell'ottava superiore, nel modo che segue:

tono – tono – semitono – tono – tono – tono – semitono.

Una riprova aritmetica della correttezza di questa successione è fornita dal risultato del prodotto dei relativi rapporti, che eguaglia proprio il rapporto complessivo 2 tra *do*+ e *do*. Infatti un calcolo non troppo complicato conferma che

$$9/8 \times 9/8 \times 256/243 \times 9/8 \times 9/8 \times 9/8 \times 256/243 = 2^{16} \times 3^{10}/2^{15} \times 3^{10} = 2.$$

Nell'altro dialogo già prima citato, l'*Epinomide*, si ripropone la costruzione. Vi leggiamo infatti (991 a-b) «che negli intervalli della scala che va da 6 a 12, si formano i rapporti di 3 a 2 e di 4 a 3; il numero medio tra i due estremi di tale progressione, che reca agli uomini il bene dell'accordo e della misura, grazie al giuoco del ritmo e dell'armonia, è un dono del beato coro delle Muse». Il numero medio di cui si parla è 9, la semisomma di 6 e 12, ma anche il numero delle Muse, le divinità figlie di Zeus e patrone delle arti, celebrate per la loro abilità nel canto e nella danza.

Questo gusto di collegare numeri, musica e pianeti permarrà per molti secoli. Ne dà testimonianza un'altra delle opere più affascinanti di Keplero, *Harmonices Mundi* (Kepler, 1997). Vi si stabilisce una corrispondenza tra note, astronomia e Muse. Ma, soprattutto, vi si tratta la così detta *musica delle sfere*, un suono continuo che deriverebbe dai moti di rotazione e rivoluzione dei corpi celesti, sole, luna e pianeti. Il sole sta al centro di questa armonia.

Torniamo al *Timeo* e al nostro breve resoconto della storia della creazione secondo Platone. Ci piace concluderlo riferendo del racconto della nascita del tempo: un altro esempio di come il pur ostico dialogo platonico contenga momenti di intensa poesia. Si narra infatti (37 c-38 c) che, completata l'opera sopra descritta, il *Demiurgo* «se ne compiacque» e «pieno di gioia pensò di renderla ancora più simile» al modello immortale. Decise allora di «creare un'immagine mobile dell'eternità», che «procede secondo la legge del numero»: quello che noi appunto chiamiamo "tempo", che dunque è nato insieme al cielo, e insieme al cielo è destinato a dissolversi «se mai ci sarà una dissoluzione».

Ma il modello, in quanto perfetto, è eterno e dunque indissolubile, e l'universo gli è simile quanto più possibile. Quindi l'eternità del modello è come un pegno della perennità del nostro tempo e del nostro cielo.

7 - L'infinito matematico

L'autentica rivoluzione scientifica che condusse in matematica allo studio sistematico dell'infinito avvenne due millenni abbondanti dopo Platone, a partire dal 1874, grazie al grande matematico tedesco Georg Cantor. Questi indicò come dotare ogni insieme anche infinito di una sua cardinalità, cioè di un "numero" preciso di elementi. Inventò per questo nuovi numeri "transfiniti", oggi denominati cardinali, che estendono i numeri naturali – sufficienti a misurare la grandezza soltanto degli insiemi finiti. I cardinali sono loro fratelli maggiori, che consentono lo stesso obiettivo all'infinito.

Uno dei risultati più famosi di Cantor, ottenuto proprio nel 1874, afferma che l'insieme dei naturali e quello dei reali (cioè dei punti di una retta), entrambi infiniti, ammettono cardinalità distinte. Anzi, le possibili cardinalità di tutti gli insiemi infiniti sono esse stesse un'infinitudine.

Cantor tuttavia ribadì con esempi a dir poco sorprendenti che due insiemi infiniti apparentemente diversi, per esempio l'uno più piccolo dell'altro anche secondo l'intuito, condividono talora la stessa cardinalità. Tanto vale, geometricamente parlando, per un segmento comunque piccolo, per il quadrato che lo ha per lato, per il cubo che lo ha per spigolo e ancora per l'intera retta, il piano e addirittura lo spazio tridimensionale. Hanno tutti lo stesso "numero" di punti. «Lo vedo, ma non lo credo»: sono queste le parole, poi rimaste famose, con cui proprio Cantor commentò il suo risultato comunicandolo al collega Richard Dedekind.

Tuttavia una simile conclusione viola apertamente il principio secondo cui il tutto è maggiore della parte – l'ottava nozione comune enunciata da Euclide nei suoi *Elementi*. Nella fattispecie: il segmento è piccola cosa rispetto a quadrato, cubo, retta eccetera, eppure è altrettanto ricco di elementi.

Un esempio molto più accessibile, che ancora contraddice lo stesso principio, si ricava confrontando la successione dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, …, N, … e quella dei loro quadrati 0, 1, 4, 9, …, N^2, … . A prima vista, questi ultimi sono una parte minuscola del tutto, mancando tra loro i tantissimi numeri "rettangoli",[16] come 2,

16 I numeri interi maggiori di 1 che non sono quadrati perfetti si possono comunque esprimere come prodotto di due fattori distinti. Per esempio 3 = 3 x 1 , 6 = 3 x 2. Per questo furono chiamati numeri rettangoli. In verità anche certi quadrati, come quelli di numeri composti, si possono vedere facilmente in questa luce, addirittura evitando il fattore banale

3, 5, 6, 7, 8, 10, … . Eppure tanti sono i numeri naturali quanti i loro quadrati, grazie alla corrispondenza biunivoca che trasforma ogni naturale N nel suo quadrato N^2, dunque 0 in 0, 1 in 1, 2 in 4, 3 in 9 e così via. I numeri "rettangoli" sfuggono a questa corrispondenza. Ma quelli che rimangono, i quadrati appunto, sono sufficienti a disporsi in biiezione con la totalità dei numeri. Già Galileo Galilei (1564-1462) aveva rilevato nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei, 2011) questa bizzarria, concludendo però:

> Queste son di queste difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente.

Timori e titubanze che solo Cantor saprà superare con decisione, oltre due secoli dopo, con la sua aritmetica transfinita. È anzi notevole come, in questa sua *"nuova scienza"*, si definisca *infinito* un insieme che si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria – questa è in verità la maniera con cui Dedekind caratterizza gli insiemi infiniti, parzialmente diversa da quella seguita da Cantor.

Ebbene, c'è chi reputa che Platone anticipi in certi spunti di un suo dialogo, il *Carmide* (168 a-e), la rivoluzione cantoriana, antitetica al principio euclideo. Sembra infatti che, in quello scritto, perfino Socrate neghi che il tutto sia sempre maggiore delle parti. Nella fattispecie, egli si chiede se si può concepire un qualcosa che è maggiore di se stesso, e quindi anche minore di se stesso. Non certo un numero (che Socrate intende finito), e nemmeno una grandezza, che con numeri finiti si misura. Eppure, rivela Socrate, quel qualcosa esiste, ed è la saggezza, che sovrintende non solo alle altre scienze ma perfino a se stessa, è dunque scienza di tutte le scienze, compresa se stessa. In verità oggi giorno quell'argomento è un po' criticato. Si ritiene infatti di dover distinguere le scienze, come la matematica, la fisica, la chimica e così via, dalla metascienza, che è invece l'analisi delle scienze e come tale appartiene a un livello superiore. La saggezza, se vogliamo appunto intenderla come metascienza, non si può con-

1; per esempio 36 = 3 x 12.

fondere con le scienze di cui tratta.

Si avverte, tuttavia, nella riflessione di Socrate, quasi un'anticipazione di certi drammatici sviluppi della storia delle teorie cantoriane. Ci riferiamo all'antinomia di Russell del 1901, secondo cui "l'insieme" di tutti gli insiemi non è in realtà un insieme, pena l'emergere di contraddizioni inestricabili. Tempo permettendo, si può forse proporre, nel nostro ideale laboratorio, il ragionamento di Bertrand Russell (1872-1970), come pure si possono accennare, in precedenza, i risultati più spettacolari di Cantor.

L'incidente di percorso costituito dal paradosso di Russell – poi superato grazie a un approccio assiomatico rigoroso, che negò per postulato la qualifica di insieme alla collezione di tutti gli insiemi – testimonia però la delicatezza del concetto in apparenza banale, eppure intricato e "comprensivo", di insieme.

Cantor stesso cercò faticosamente per anni di determinarlo. Anche il nome stesso, "insieme" nella versione italiana, maturò progressivamente, preferito a possibili alternative come molteplicità o varietà. Oggi si usa introdurre la nozione di insieme in forma appunto assiomatica, reputandola un concetto primitivo – che come tale, al pari di punto e retta negli approcci più diffusi alla geometria, non necessita di una definizione – e postulandone semmai le principali proprietà elementari.

Cantor preferì invece un'altra strada, cioè una definizione precisa. Ma perseguì il suo obiettivo in maniere che oggi paiono quasi impacciate. La più famosa di queste sue definizioni si trova nelle Grundlagen – i già citati *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità* del 1883, uno dei suoi articoli più celebri ed emozionanti (Cantor, 2012, pp. 77-134) – e introduce l'insieme come «un Molti che si fa pensare come un Uno», «una classe di elementi determinati che possa essere unita in un tutto da una legge». Termini vaghi se non ingenui e goffi, che anzi gli meriteranno critiche malevole tra i matematici di fine Ottocento. Ma in realtà, nel formulare la sua definizione, Cantor si ispira a un riferimento classico di tutto rispetto, cioè ancora Platone: per la precisione a un passo del *Filebo*, segnatamente quello (24a-26d) in cui Socrate descrive il genere misto, *miktón*, come il punto di incontro tra il *péras* (il limite, la misura, tutto quanto è già ordinato e sistemato) e l'*ápeiron* (l'indefinibile, l'illimitato, l'assenza di ogni determinazione).

Il misto è «l'unità risultante dalla loro mescolanza», quindi, potremmo dire, la realtà, l'impulso che conduce il secondo polo al primo e così genera l'essere.

Tale sarebbe il ruolo del concetto di insieme all'interno di quella matematica che simboleggia alla perfezione il *péras*. È per suo tramite che il molti diventa un uno.

In verità, come già si diceva, in Platone ogni realtà è al tempo stesso unica e molteplice, proprio come punto di incontro tra *péras* e *ápeiron*: dunque, un disordine ordinato. La vera conoscenza implica di sapere quanti e quali elementi vanno individuati nell'infinità sempre presente per comprendere il sistema che si va analizzando. E questo rimanda ovviamente al numero. Al rapporto tra limite e numero Platone dedica nel *Filebo* altre pagine tanto belle quanto difficili. Scrive appunto che il numero è «l'intermediario tra l'indeterminazione e l'unità» (16 d-e), perché fissa quanto all'origine dell'universo era appunto uno e insieme molteplice. Per questo il numero è dono degli dei agli uomini, trasmesso, insieme al fuoco, da un qualche coraggioso Prometeo.

8 - Matematica e società

Platone adopera spesso numeri, proporzioni e figure geometriche come chiave di lettura e di rappresentazione del mondo e della vita.

L'esempio più famoso è forse il *numero nuziale*, che è descritto nell'ottavo libro della *Repubblica* (546 b-d). Si tratta della soglia aritmetica che dovrebbe sovrintendere al controllo delle nascite nella città ideale. In verità il testo di Platone è in proposito tanto solenne quanto sibillino. Sembrerebbe tuttavia che di due numeri distinti si parli, atti a regolare rispettivamente la generazione umana e quella divina. Entrambi sono ricavati dalla così detta *base epitrita*, ossia dal rapporto 4 : 3, come dire dalla coppia di numeri 3, 4 che, uniti a 5, compongono perfino una terna pitagorica.

Il primo numero sarebbe 216, che corrisponde in giorni a poco più di 7 mesi, cioè al tempo più breve per una gestazione umana. Lo si ottiene dai tre numeri suddetti sommandone i cubi. In effetti $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125$ coincide proprio con 216.

L'altro numero, quello della generazione divina, è 12.960.000 e rivelerebbe la durata del grande anno cosmico, al termine del quale tutti i corpi celesti si riallineano nella posizione originaria e tutti i fenomeni prendono ciclicamente a ripetersi. Per calcolarlo, si parte dal prodotto $3 \times 4 \times 5$ «moltiplica[ndolo] 3 volte», cioè elevandolo alla quarta: in effetti $60^4 = 12.960.000$. Platone osserva poi che questo numero nuziale manifesta poi «due armonie», cioè si può vedere:

- sia come numero quadrato, in quanto 360^2,
- sia come numero rettangolo, in quanto 4800×2700.

Di entrambe queste rappresentazioni Platone propone computazioni abbastanza enigmatiche. Nel primo caso, ridistribuisce i fattori di $(3 \times 4 \times 5)^4$, cioè 3, 4, 5 presi ciascuno 4 volte, in modo da ottenere:

$$(3 \times 4 \times 3) \times (3 \times 4 \times 3) \times (4 \times 5 \times 5) \times (4 \times 5 \times 5)$$

e poi osserva che il prodotto dei primi due fattori è un numero quadrato, 36^2, quello dei due restanti è addirittura una potenza di 10, in particolare 100^2.

Ancora più complicata è la genesi dei due fattori nel secondo caso. Ci si affida, sembrerebbe, a $\sqrt{50}$, che è la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 5 (infatti $5^2 + 5^2 = 50$). La si approssima con quella che oggi chiameremmo la sua parte intera, cioè con 7, che è la radice quadrata di 49. A seguire si diminuisce 49 di 1, in modo da ottenere 48, che poi si moltiplica per «cento quadrati», cioè per 100. Si arriva così al primo fattore 4800.

Il secondo si ottiene molto più semplicemente moltiplicando «cento cubi di 3», dunque come 27×100.

Sempre nella *Repubblica*, ma stavolta nel libro IX (587 c-588 a), l'autore ci propone un confronto tra il filosofo e il tiranno, cioè tra i tipi di governante più illuminato e più dispotico. Questa comparazione è condotta anche in termini matematici. Per apprezzarla compiutamente converrà però ricordare come Platone distingua in questo dialogo 6 forme di governo, che in un ordine decrescente di valore si distribuiscono nei cinque gradini della scala che segue (il libro ottavo della *Repubblica* è dedicato per intero alla loro presentazione):[17]

1. Al culmine, come già accennavamo nel secondo capitolo, sta l'aristocrazia, che è fondata sulla ragione. La parola aristocrazia ha oggi un significato diverso da quello di Platone. Corrisponde infatti nel suo pensiero al governo dei migliori, in greco *áristoi*: i più saggi, i più vicini all'essere e alla verità, in una parola i filosofi. Potremmo chiamarlo "aristocrazione", per differenziarlo dall'altro senso ora prevalente. Non si esclude poi che questa comunità di uomini superiori si riduca addirittura a un singolo, un monarca, un filosofo re. Si ha dunque come caso particolare una seconda forma di governo, la monarchia.
2. C'è poi la timocrazia, che preserva alcune caratteristiche dell'aristocrazia ma le contamina col desiderio del successo, dell'affermazione, della ricchezza. Il modello cui Platone si ispira sembra quello di Sparta.
3. Segue l'oligarchia, in cui l'avidità di ricchezza prevale, diventa il supremo valore politico e cancella la giustizia.
4. Al contrario la democrazia – esemplificata da Atene – è caratterizzata dall'eccesso di libertà.
5. Produce allora come inevitabile conseguenza la tirannide, cioè l'asservimento totale a un solo uomo forte, che rende i concittadini schiavi e impauriti (ma riduce pure se stesso in una condizione di ossessione e sospetto).

Platone esamina i due estremi opposti di questa scala, cioè il filosofo e il tiranno e con una triplice argomentazione dimostra che il primo è superiore al secondo, e anzi più felice. Alla fine interpreta

17 Ma neppure a questo proposito il pensiero di Platone è univoco. In altra opera della maturità, il *Politico*, si distinguono tre modelli di governo, che poi a loro volta di suddividono in due possibili varianti, una positiva e l'altra negativa: il dominio di uno (nelle due forme, monarchia o tirannide), il dominio di pochi (aristocrazione od oligarchia) e il governo dei molti (democrazia, un solo nome per due forme).

aritmeticamente il risultato. Osserva infatti che, nella progressione precedente il tiranno sta 3 gradini sotto all'uomo oligarchico, che a sua volta segue di 3 gradini il filosofo. Si affida allora alla proporzione $1 : 3 = 3 : 9$ (che poi si può integrare con i rispettivi medi geometrici $\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$ in modo da coinvolgere anche uomo democratico e uomo timocratico e formare $1 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3 = 3 : 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} : 9$). Conclude che il filosofo vale 9 volte il tiranno.

Tra l'altro $9 = 3^2$ è un quadrato. Ma la vera distanza tra il tiranno e il piacere si ricava in riferimento alla dimensione 3 del mondo fisico, dunque elevando il precedente valore 9 alla terza. Risultato: $729 = 9^3$, che in verità è il valore che Platone si propone di raggiungere, perché doppio di 364,5. Questo infatti si collega al numero complessivo di giorni e notti di un anno.

Analoghe considerazioni si leggono nel *Gorgia*, 465 b-c, riferite però ad altri argomenti. Si mettono infatti a confronto:

- da un lato quattro arti, due del corpo e due dell'anima, rispettivamente medicina, ginnastica, giustizia e legislazione,
- quattro corrispondenti degenerazioni, o seduzioni, prodotte dall'adulazione: nell'ordine cosmesi, cioè gusto di agghindarsi, e poi cucina, retorica e sofistica.

Si esprime la situazione «col linguaggio dei geometri», tramite la proporzione:

cosmesi : ginnastica = cucina : medicina =
= sofistica : legislazione = retorica : giustizia.

A proposito delle terne pitagoriche, come (3, 4, 5): nei suoi commenti al teorema di Pitagora, Proclo (Proclo, 1978) riferisce di un contributo di Platone allo sviluppo della loro teoria. Per scrupolo ricordiamo che una terna pitagorica è una tripla di interi positivi (a, b, c) che soddisfano l'equazione del teorema di Pitagora $x^2 + y^2 = z^2$ e quindi possono figurare nell'ordine come misure dei cateti e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Una terna pitagorica si dice poi primitiva quando a, b e c sono primi tra loro. Si noti che, siccome l'equazione di Pitagora è omogenea,[18] qualunque sua soluzione tra gli interi positivi si ottiene da una di queste terne primitive, moltiplicandone i tre termini per la stessa costante intera positiva.

Euclide spiega come generare terne pitagoriche nel lemma 1 alla proposizione 29 del libro X degli *Elementi* (Euclide, 1988), adoperando termini geometrici più consoni alla sua sensibilità. Adattata alle forme dell'aritmetica moderna, la sua strategia suggerisce, per costruire una terna pitagorica (a, b, c), di prendere due numeri interi $m > n > 0$ e di considerare:

- la differenza dei quadrati $a = m^2 - n^2$,
- il doppio prodotto $b = 2mn$,
- la somma dei quadrati $c = m^2 + n^2$.

Se poi si scelgono m, n primi tra loro e con parità opposta, allora la terna così ricavata (a, b, c) è primitiva. Anzi, ogni terna pitagorica primitiva si ottiene in questo modo (a meno di permutare a e b).

Ecco qualche esempio della costruzione euclidea:

- da $m = 2$ e $n = 1$, si ricavano $3 = 2^2 - 1^2$, $4 = 2 \times 2 \times 1$, $5 = 2^2 + 1^2$ (le componenti di una terna primitiva),
- da $m = 5$ e $n = 1$, $24 = 5^2 - 1^2$, $10 = 2 \times 5 \times 1$, $26 = 5^2 + 1^2$ (una terna non più primitiva),
- da $m = 3$ e $n = 2$, $5 = 3^2 - 2^2$, $12 = 2 \times 3 \times 2$, $13 = 3^2 + 2^2$ (di nuovo una terna primitiva).

Un caso particolare della costruzione di Euclide si ha per $n = 1$. È la situazione dei primi due esempi precedenti, ma non del terzo. In generale si parte da un intero pari $b = 2m$ e si formano $a = m^2 - 1$ e $c = m^2 + 1$. Perché la terna così costruita sia primitiva basterà assumere m pari, cioè primo con 1 e di parità opposta a 1.

Ebbene, Proclo attribuisce a Platone questa variante, e in verità già a Pitagora un'idea simile.

18 Cioè tutti i monomi che la compongono hanno lo stesso grado, nel caso specifico 2.

Concludiamo il capitolo commentando un altro passo matematico di Platone, tanto famoso quanto oscuro. Ci riferiamo all'accenno all'ipotesi geometrica presente ancora nel *Menone*, 86 d-87 c.

Il tema del dibattito, come sappiamo, è se la virtù si possa o no insegnare. Socrate è invitato a rispondere. Obietta in tono amabile che, per affrontare l'argomento, dovrebbe prima stabilire che cosa sia la virtù. Ma vuole compiacere il suo interlocutore Menone, il quale pretende di esaminare la qualità di una cosa senza conoscerne ancora la natura. Procede allora «per ipotesi», proprio come fanno i matematici. Gli studiosi di geometria, spiega infatti Socrate, quando sono interrogati su questioni che li riguardano, forniscono talora risposte differenziate, a seconda appunto delle ipotesi di partenza e dei casi possibili in cui il problema si può suddividere. Socrate cita in proposito una questione specifica di geometria, sull'iscrizione di un triangolo in un cerchio, ma lo fa in toni così criptici e misteriosi che ancor oggi si discute a che cosa davvero egli alluda (Cattanei, 2011).

L'analogia gli serve tuttavia, tornando alla virtù, per discutere se sia o no insegnabile pur prescindendo da ogni definizione preliminare, attribuendole provvisoriamente, appunto per ipotesi, certe caratteristiche.

Rimandiamo a (Frajese, 1963, pp. 111-114) per la discussione dell'interrogativo geometrico evocato da Socrate. Sempre seguendo (Frajese, 1963), ricordiamo però come il passo in questione esemplifichi il procedimento matematico così detto del diórisma: distinguere cioè i casi in cui la risposta a un problema si può suddividere, e stabilire in ognuno di essi l'esistenza, l'ambito e il numero delle soluzioni. Questa strategia sarebbe stata introdotta, più o meno all'epoca di Platone, dal matematico Leone. A illustrarla in modo più semplice del caso esposto nel *Menone* provvedono nuovamente gli *Elementi* di Euclide, nella proposizione 22 del libro I, quando l'obiettivo è costruire un triangolo di lati assegnati e la condizione necessaria e sufficiente per riuscirci (con la tecnica che Euclide descrive) è che ogni lato sia minore della somma degli altri due.

Forse non è del tutto fuori luogo ricordare qui, a proposito del diórisma, la celebre definizione che della matematica propose il grande scrittore austriaco Robert Musil (1880-1942), a oltre due millenni di distanza da Platone, nel breve saggio *L'uomo matematico* (Musil, 2007): «una meravigliosa apparecchiatura spirituale fatta per pensare in anticipo tutti i casi possibili».

9 - Platone oggi

Un interrogativo inevitabile al termine di una nota che ha inteso proporre nel 2020 un laboratorio didattico sulla matematica in Platone è quello che insinuavamo al suo inizio, e cioè: quale dialogo si può instaurare, quale comunità di aspirazioni si può formare tra ragazze e ragazzi di oggi e l'antico filosofo? Poiché – come già anticipavamo – il mondo e la scuola sono cambiati, anche solo negli ultimissimi anni. Diversi sono la sensibilità, gli orientamenti, gli strumenti di comunicazione e quindi anche l'approccio didattico.

I giovani di adesso – è impressione diffusa – sono portati al linguaggio delle immagini, dei messaggi ed a scambi rapidi di esperienze: forme di contatto che, per natura e non per malizia, si fermano spesso alla superficie e sfuggono ogni approfondimento. Dunque – è un rammarico altrettanto frequente – i ragazzi non sono abituati a leggere e pensare, e talora si esprimono con difficoltà nei modi del linguaggio tradizionale. Si affidano, appunto, ad altre forme di condivisione e discussione, che mal si adattano a parlar di filosofia. Della matematica poi, e della scienza in generale, si prediligono gli aspetti concreti e fuggevoli evitando teorie troppo pesanti. La geometria, infine, sembra caduta a scuola in particolare disgrazia.

Val la pena di ricordare che invece, nella gerarchia della conoscenza di Platone, l'immagine è la forma più bassa e incerta, solo un'ombra visibile ma futile delle cose. Al contrario sono il pensiero e la matematica astratta la suprema via di accesso alla pienezza dell'intellegibile. La geometria, poi, ha gli attributi e le qualità che abbiamo già largamente descritte e che possiamo sintetizzare nuovamente con le parole bellissime, che traiamo nuovamente dalla *Repubblica* (527 b): essa – la geometria – «riguarda la conoscenza di ciò che immutabilmente ed eternamente è, non di ciò che è soggetto di divenire e perisce».

Dunque Platone scrittore e pensatore, e tanto più Platone matematico, rischiano nella scuola di oggi di apparire superati e di cadere nell'indifferenza.

È vero che il suo metodo didattico, così come spiegato nella *Repubblica* e nel *Teeteto* ed esplicitato nel *Menone* – proporre interrogativi piuttosto che imporre riposte, affidarsi al colloquio piuttosto che al dogma – ha tutta l'attualità che abbiamo già elogiato. Ma gli argomenti che oggi si considerano e dibattono, a scuola e non solo a scuola, non sono più la virtù o la natura della scienza, e neppure, più modestamente, poligoni e poliedri.

In linea di principio viene facile auspicare che cultura e pensiero rimangano anche ai nostri giorni *nóesis*, cioè esercizio supremo di rispetto e di libertà. Eppure in (Eustacchi & Migliori, 2017) si rileva e deplora come nella sostanza gli intellettuali del mondo occidentale abbiano ormai abdicato dal loro ruolo di coscienza critica e non sappiano più incidere con la loro riflessione sullo sviluppo della società – al contrario di Platone, Aristotele e dei loro colleghi dell'antichità.

Crediamo che questo grido di dolore debba allargarsi un po' anche alla scuola. Viene infatti da pensare che, al suo interno, non nella pratica dei singoli docenti, ma nell'appiattimento generale, all'educazione – quella socratica – si sostituisca talora la propaganda,[19] o meglio le propagande – molteplici per contenuto, ma simili per natura –, e all'idea subentri una varietà caotica di spunti e impulsi.

Per la geometria, poi, sono disponibili software come *GeoGebra* che la illustrano in modo estremamente più potente ed efficace degli antichi strumenti di riga e compasso. In questo, e non solo in questo, la matematica si è trasformata e affinata. Ma la stessa geometria non può ridursi a un gioco al computer. Perché quel gioco nasce comunque dalle idee, a cominciare da quelle geniali della Grecia classica, prima e dopo Platone. Il gioco introduce alle idee; ma le idee precedono il gioco.

Idem per la scienza del calcolo, da intendersi oggi in senso lato: non ristretta alla vecchia aritmetica, ma a tutti i metodi e le teorie che a

19 Riprendiamo qui una riflessione dello scrittore tedesco Thomas Mann (1875-1955) in (Mann, 2018, *Attenzione, Europa!*, p. 89): si rivolge a tutt'altra epoca e a un ben più doloroso contesto, ma ci pare del tutto attinente anche al nostro.

questo fine sono stati elaborati nei secoli. Algoritmi di computazione rapida e raffinata possono servire alla furbizia degli affaristi oppure, più nobilmente, a statistica, economia, medicina e quant'altro. Ma le scienze del calcolo, così come la geometria, possiedono un nitore, un fascino, un appiglio, una bellezza loro proprie e intrinseche, che trascendono ovviamente le ricadute concrete. Questo ci insegna Platone. E questo sarebbe importante comunicare agli studenti, nelle forme che il nuovo secolo suggerisce. Tacere significa forse derubarli – di una parte fondamentale di se stessi.

Qualche parola, poi, sui due temi fondamentali indicati nell'introduzione: l'evoluzione della matematica da Platone in poi e il ruolo del pensiero greco classico in questo sviluppo storico.

Come abbiamo abbondantemente rilevato, nella concezione platonica gli oggetti matematici, dai numeri agli enti geometrici, sono riflessi di modelli ideali e perfetti che preesistono e ai quali noi accediamo con la bussola del ricordo. C'è dunque una matematica a noi esterna, cui progressivamente aderiamo.

Questa visione, pur trasformandosi anch'essa nella storia del pensiero e differenziandosi in varie forme particolari, è ancora condivisa a livelli autorevolissimi. Si parla ancora oggi di platonismo matematico. A esprimerne le convinzioni provvede ottimamente Hardy in *Apologia di un matematico* (Hardy, 2002). Leggiamo infatti in quel libro che «la realtà matematica giace fuori di noi e la nostra funzione è quella di scoprirla e osservarla». Così «i teoremi che noi dimostriamo, e che in modo magniloquente descriviamo come nostre "creazioni", sono semplicemente i resoconti delle nostre osservazioni».

Tanto accade in definitiva nel *Menone*, dove la soluzione geometrica dello schiavo preesiste ai suoi tentativi e alle sue reminiscenze. Tale è la matematica del filosofo e della *diánoia*.

Tale è la matematica nel celebre passo del *Saggiatore* di Galilei, (Galilei, 2015, capitolo 6), ove si afferma che essa è la lingua in cui è scritta la filosofia:[20]

20 Si riferisce alla "filosofia naturale", come veniva chiamata a quei tempi la "fisica".

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il platonismo matematico va però oltre. Come Hardy ci spiega, esso ritiene che i concetti matematici vivano a loro volta una propria esistenza di idee che trascendono la natura del mondo e l'immaginazione umana. Per dirla con le parole di un famoso logico del Novecento, Paul Bernays (1888-1977), essi si distaccano «da ogni legame con il soggetto riflettente» (Bernays, 1935, p. 53). A vario titolo e con i dovuti distinguo, che è impossibile concentrare in poche righe, fu questa la posizione condivisa, tra gli altri, da Cantor e Russell.

Torniamo però al Platone originario. Il *Menone* ci consegna nel colloquio tra Socrate e schiavo e nella costruzione geometrica da loro condivisa l'evidenza del caso più semplice del teorema di Pitagora, per un triangolo rettangolo isoscele, o per un semiquadrato che dir si voglia. Ma per estendere l'analisi servirà una teoria chiara e generale delle costruzioni con riga e compasso – quanto Euclide elaborerà nel primo libro degli *Elementi* – come pure la trattazione raffinata di commensurabilità e incommensurabilità, che è ancora presente negli *Elementi*.

Tuttavia la matematica ellenistica che Euclide rappresenta – si è già detto che egli operò ad Alessandria d'Egitto tra il quarto e il terzo secolo a. C. – evolve rispetto alla concezione platonica.

Così notiamo e ammiriamo negli *Elementi* anzitutto la compattezza complessiva della struttura: non a caso il sistema euclideo sarà reputato per secoli un modello immacolato di perfezione, punto di riferimento di ogni teoria scientifica.

Ma osserviamo anche la cura con cui ogni nuovo oggetto geometrico viene esplicitamente costruito, a cominciare dal triangolo equilatero nella proposizione 1 del libro I, appunto con gli strumenti classici della riga e del compasso.

Ravvisiamo poi negli *Elementi* argomentazioni raffinate e precise, deduzioni, dimostrazioni anche astratte, come quella già citata nell'appendice 27 del libro X, proprio a riguardo dell'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato, nella quale si ricorre due volte al ragionamento per assurdo.[21]

Ci si muove perciò in una matematica diversa dalla visione platonica: non più il ricordo e la contemplazione delle idee immutabili, ma un ambito attivo, in cui si opera costruttivamente, si studiano i fenomeni dell'universo e al tempo stesso si esercita la potenza del pensiero.

Archimede (287 a. C.-212 a. C.), che può ritenersi altro matematico ellenistico, e tra i più grandi scienziati mai esistiti, testimonia col suo genio questa duplice attenzione. In dimostrazioni famose, come quella in cui calcola l'area di un segmento parabolico (Archimede, 1974):

- da un lato, nel *Metodo* si affida ad argomenti fantasiosi e ingegnosi, in qualche modo ispirati dalla fisica, per ottenere una prima prova convincente seppure per certi versi "intuitiva",
- dall'altro, nella *Quadratura della parabola,* avverte l'esigenza di una conferma rigorosa, basata su deduzioni accurate (sarebbe bello che il laboratorio trovasse il tempo per ospitare e confrontare le due argomentazioni).

Del resto, pure l'immaginazione di Archimede si è meritata riconoscimenti ed elogi nei millenni che seguirono. Visto che ci è già capitato di ricordare Hardy (2002) e pure di considerare il rapporto tra matematica e poesia, ci piace ricordare qui l'opinione che in quel libro si esprime, che «Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no».[22] Giudizio peraltro condiviso qualche secolo prima da un pensatore acuto e indipendente come Voltaire (1694-1778): «Nella matematica

21 Scriverà Hardy (2002): «La *reductio ad absurdum*, tanto amata da Euclide, è una delle più belle armi di un matematico. È un gambitto molto più raffinato di qualsiasi gambitto degli scacchi: un giocatore di scacchi può offrire in sacrificio un pedone o anche qualche altro pezzo, ma il matematico offre la partita».

22 Eschilo, il padre della tragedia greca, visse dal 525 al 456 a. C. .

c'è tanta immaginazione da restarne stupefatti. Archimede era dotato di tanta immaginazione almeno quanto Omero», così leggiamo nel *Dizionario Filosofico*, proprio alla voce "Immaginazione" (Voltaire, 2013, p. 1969).

In definitiva, nel modo di vedere ellenistico la matematica non è più reminiscenza, ma scienza esatta, costruzione di modelli teorici che leggono il mondo ma valorizzano il pensiero – con l'impegno costante di mantenersi intrinsecamente saldi e coerenti.

Questa visione della matematica, lontana da quella platonica, si raffinerà e differenzierà nei secoli, privilegiando l'uno o l'altro dei suoi due poli antitetici, la natura con le sue suggestioni, o l'intelletto con le sue sottigliezze e le sue deduzioni. Specie tra fine Ottocento e inizio Novecento, arriverà a contrapporre i due estremi in discussioni anche accese. Quanto poi alle dimostrazioni, da un lato si accoglieranno con favore i procedimenti più astratti, come il ragionamento per assurdo; e dall'altro si pretenderà invece una matematica più costruttiva e concreta, che provi direttamente le sue affermazioni, senza nascondersi dietro a negazioni, gambitti e funambolismi logici. Matematici di genio si schierarono dall'una e dall'altra parte: David Hilbert (1862-1943) propugnò il punto di vista più astratto, Leopold Kronecker (1823-1891) e Henri Poincaré (1854-1912) abbracciarono quello più costruttivo.

Oggi la visione generale prevalente della matematica la intende come ricerca di modelli astratti della realtà, atti a rappresentarne e possibilmente spiegarne i fenomeni. Un esempio, purtroppo attualissimo, ci è dato dallo studio delle epidemie. Quanto al nostro laboratorio, non potrà certo ospitare una discussione estesa del tema. Ma vorrà, se non altro, insinuare la questione generale su che cosa è la matematica, e confrontare queste moderne concezioni con Platone e il platonismo. Senza pretesa di trarne alcuna conclusione.

Appendice

La curva di Ippia

Concludiamo queste note proponendo un'ultima testimonianza della raffinatezza, della bellezza e dell'inventiva della geometria della Grecia classica, sin dai tempi di Platone e quindi da prima di Euclide. Ci riferiamo alla *curva quadratrice* o *trisettrice* di Ippia.

Questo Ippia di Elide fu matematico, astronomo e sofista della seconda metà del quinto secolo a. C. – personaggio di grandissimo successo, quello che oggi definiremmo un tuttologo. Viene in genere identificato con l'interlocutore di Socrate nei due dialoghi platonici intitolati, appunto, *Ippia minore* e *Ippia maggiore*. In entrambi viene descritto come personaggio vanaglorioso e pieno di sé, facile bersaglio di ironie neanche troppo velate da parte di Socrate. Già in altra opera platonica[23] Ippia è elencato tra quei sofisti che girano per il mondo e, «città dopo città, convert[ono] la gioventù […] ad attaccarsi a loro, pagando dei bei soldi, e in più dicendo grazie»: l'esatto contrario dello stesso Socrate. Ma nei due dialoghi sopra citati i sarcasmi coinvolgono pure la matematica.

Nell'*Ippia minore* (366 c-368 a), Socrate dapprima ammette la bravura dell'interlocutore a far rapidamente di conto, ma poi insinua il sospetto che egli la adoperi a suo beneficio: eccellendo nei calcoli, può adattarli ad affermare il vero e il falso a seconda della propria convenienza. Idem per la geometria.

Le ironie si accrescono nell'*Ippia maggiore* (285 b-c), dove si raccontano le esperienze di insegnamento del sofista tra gli Spartani, i quali, però, sembrano refrattari ai suoi discorsi di astronomia, geometria e aritmetica – come lo stesso Ippia a malincuore riconosce.

Eppure allo stesso personaggio Proclo e altri antichi commentatori attribuiscono la paternità della curva di cui sopra parlavamo, la quale consente, insieme a riga e compasso, di risolvere due famosissimi problemi della geometria classica: la quadratura del cerchio

23 *Apologia di Socrate*, 20 a.

e la trisezione dell'angolo. A questo si deve la denominazione con cui essa è conosciuta, appunto quadratrice o trisettrice. I problemi sollecitano, rispettivamente, la costruzione con riga e compasso:

- del lato di un quadrato che ha la stessa area di un cerchio di raggio assegnato;
- di semirette interne a un dato angolo arbitrario, capaci di suddividerlo in 3 parti uguali.

Sappiamo oggi che in nessuno dei due casi esiste procedura che risponda alla richiesta. Per la quadratura del cerchio, la prima dimostrazione di questa impossibilità arriva come corollario dal teorema di Ferdinand von Lindemann del 1882 sulla trascendenza di π e usa metodi di analisi e algebra. Per la trisezione dell'angolo la risposta, ugualmente negativa, è meno complicata e fu osservata nel 1837 dal matematico francese Wantsel, insieme a quella analoga per la duplicazione del cubo. Magari conviene ribadire che la trisezione, cioè la suddivisione in tre parti uguali, si riferisce a un angolo arbitrario: per certi angoli particolari, come quelli retti o piatti, l'operazione è certamente possibile con riga e compasso.

A proposito della duplicazione del cubo, ricordiamo di aver già sottolineato nel capitolo 4 come la costruzione si realizzi se a riga e compasso si aggiungono strumenti che sanno disegnare e intersecare parabole o iperboli: il risultato che si attribuisce a Menecmo.

Allo stesso modo, con l'aiuto della curva trisettrice o quadratrice e di meccanismi che sappiano tracciarla, si possono ottenere sia la trisezione di un angolo che la quadratura del cerchio. La prima delle due costruzioni sarebbe opera dello stesso Ippia, la seconda di Dinostrato, che operò poco dopo, intorno alla metà del quarto secolo a. C., e tra l'altro fu fratello di Menecmo.

L'obiettivo di questa appendice è di illustrare entrambe queste procedure, premettendo ovviamente la presentazione della curva.

Ci sono vari modi per definirla. Quello più conveniente per noi si affida alla cinematica, e cioè allo spostamento combinato di due punti, che si muovono il primo di moto circolare uniforme e il secondo di moto rettilineo uniforme.

In dettaglio, è dato un quadrato OABC. Si descrive poi l'arco di circonferenza di centro O e raggio OA = OC, passante per A e C – quindi un quarto dell'intero circolo. Si considerano i due punti D ed E che, procedendo simultaneamente, percorrono come detto:

- il primo, D, l'arco di circonferenza AC da A verso C con un moto circolare uniforme,
- il secondo, E, il segmento OA da A verso O con moto rettilineo uniforme.

Alla partenza D ed E coincidono entrambi con A, mentre alla fine D arriva in C ed E in O. La quadratrice (in rosso nella figura 9) è la curva percorsa al variare del tempo t dal punto F di intersezione tra il raggio OD e la parallela per E a OC.

Dunque F coincide con A all'istante iniziale, mentre rimane indefinito alla conclusione del movimento, quando OD coincide con OC.

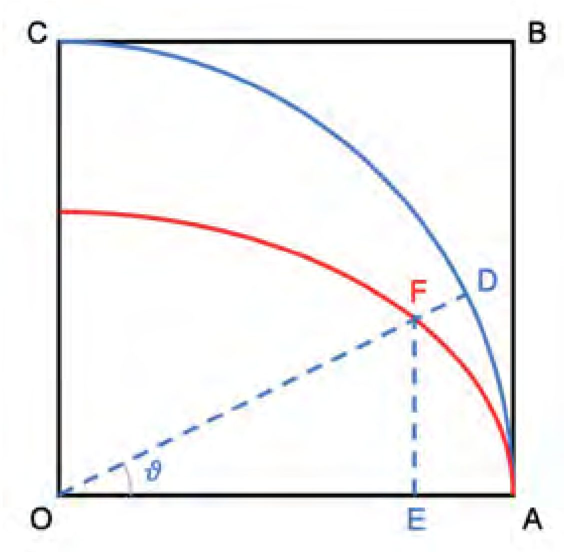

Fig. 9.

Oggi il disegno della curva è semplificato dall'uso di software come *GeoGebra*. Ma sin nei tempi antichi si era ideato uno strumento, il compasso della quadratrice, che descrive la curva sulla base della precedente definizione. Può essere utile illustrarlo, per sottolinearne l'ingegnosità. Consiste di due aste della stessa lunghezza del raggio OC, connesse nel punto F in maniera da muoversi simultaneamente:

- la prima, con estremo fisso in O, corrisponde proprio a OD, e ruota intorno a O lungo l'arco AC partendo da A;
- la seconda, inizialmente in AB, muove parallelamente a questo segmento e quindi a OC, ha gli estremi vincolati a percorrere due corsie in AO e BC e procede in questo modo a sinistra verso OC.

Le due aste (rappresentate dai segmenti arancione nella figura 10) si spostano uniformemente. Così il loro punto F di incrocio disegna la quadratrice.

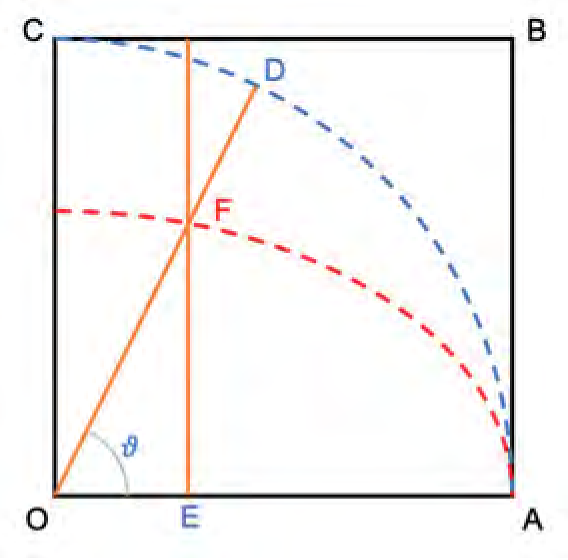

Fig. 10.

Oggi gli strumenti della geometria analitica consentono di estendere la curva anche all'esterno dell'ambito finora proposto. Consideriamo infatti un sistema di riferimento cartesiano (figura 10) che ha:

- origine O,

- i semiassi positivi di ascisse e ordinate corrispondenti rispettivamente ai segmenti orientati OA e OC,
- (per semplicità) OA e OC di lunghezza 1.

Allora i punti F della curva quadratrice sono quelli le cui coordinate (x, y) soddisfano, rispetto al parametro tempo t (che possiamo convenire di far variare nell'intervallo $0 \le t < 1$), le equazioni

$$x = 1 - t\,, \quad y/x = \mathrm{tg}\,(\pi/2\, t)$$

da cui si ricava l'equazione cartesiana

$$y = x\,\mathrm{tg}\,(\pi/2\,(1 - x)) = x\,\mathrm{tg}\,(\pi/2 - \pi/2\, x) = x\,\mathrm{cotg}\,(\pi/2\, x).$$

Così la curva prima descritta si presenta come il grafico di una funzione della variabile reale x ristretta all'intervallo $0 < x \le 1$, ed è lecito provare a estenderla all'intero asse delle ascisse. Il primo a concepire questo prolungamento fu il matematico francese Gilles de Roberval (1602-1675) nel XVII secolo, dunque due millenni dopo Platone. Per ottenerlo osserviamo anzitutto che

$$\lim_{x\to 0} x\ \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \times \frac{\frac{\pi}{2}x}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \times \frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Quindi la funzione $y = x\,\mathrm{cotg}\,(\pi/2\;x)$ si può estendere per continuità a $x = 0$ assegnandole il valore $2/\pi$. Nell'approccio geometrico di partenza, questo corrisponde a intersecare la curva quadratrice col segmento OC.

Possiamo poi espandere la funzione a tutta la retta reale, salvo che nei punti x diversi da 0 in cui la cotangente di $\pi/2\;x$ resta indefinita, dunque per $\pi/2\,x$ differente da un multiplo intero non nullo di π e in definitiva per x diverso da un valore intero pari $\neq 0$. Il grafico che ne consegue è in figura 11.

Mostriamo adesso come risolvere, adoperando il compasso della quadratrice insieme a riga e compasso, i due classici problemi sopra

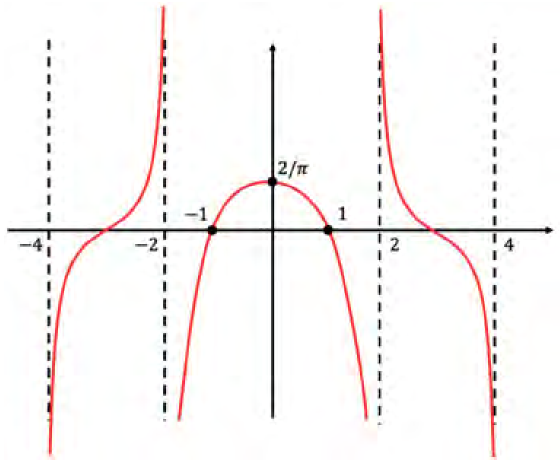

Fig. 11.

citati, quadratura del cerchio e trisezione dell'angolo. Cominciamo da quest'ultima. Facciamo riferimento alla originaria costruzione geometrica della curva.

Trisezione di un angolo. È dato l'angolo θ, che possiamo supporre senza perdita di generalità $0 < \theta \leq \pi/2$. L'intento è suddividerlo in 3 parti uguali. Equivalentemente: in riferimento alla figura della quadratrice che ci è già familiare, si deve ripartire in 3 parti uguali (tramite i punti D', D'') l'arco di cerchio AD descritto dal primo punto D che si muove lungo la circonferenza di moto circolare uniforme. Denotiamo con E, come già in precedenza, l'altro punto che si muove coordinatamente con D lungo il raggio OA con moto rettilineo uniforme. Ad archi uguali DD' = D'D'' = D''A della circonferenza corrispondono allora segmenti uguali EE' = E'E'' = E''A. Dunque il problema della trisezione di θ si riduce a quello suddividere il segmento EA in tre parti uguali. Ma a questo si sa già come provvedere col solo uso di riga e compasso. La costruzione sopra descritta è illustrata dalla figura 12.

Quadratura del cerchio. Indichiamo con H il punto di intersezione (adesso ben definito) della curva quadratrice con OC. Sappiamo che OH ha lunghezza $2/\pi$. Da qui bastano riga e compasso e strategie ben note per ottenere:

- prima un segmento di lunghezza π, che, insieme a $2/\pi$ completa i due termini medi della proporzione $1 : 2/\pi = \pi : 2$ che ha estremi 1 e 2;
- poi un segmento di lunghezza $\sqrt{\pi}$ che è media proporzionale tra 1 e π.

Quest'ultimo segmento costituisce il lato del quadrato cercato.

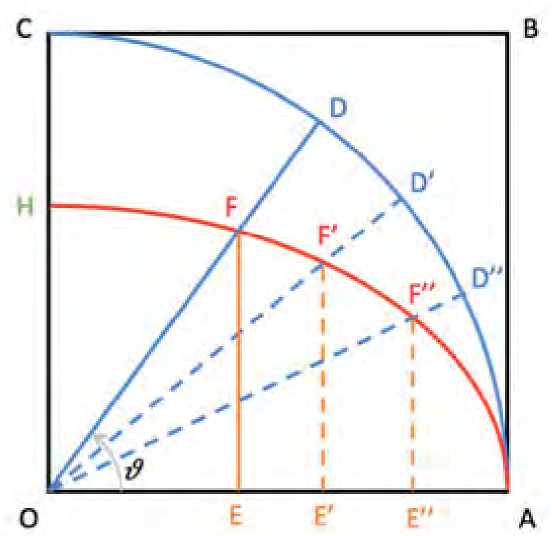

Fig. 12.

Bibliografia

ARCHIMEDE (1974), *Opere* (a cura di A. Frajese). Torino: UTET.

BERNAYS P. (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'enseignement mathématique*, vol. 34, pp. 52-69.

CANTOR G. (2012). *La formazione della teoria degli insiemi.* Milano: Mimesis.

CATTANEI E. (2011). "Arithmos" nel "Teeteto", nel "Sofista" e nel "Politico" di Platone. *Formal structures of Plato's dialogues. "Theaetetus", "Sophist" and "Statesman"* (a cura di F. L. Lisi, M. Migliori, J. Monserrat-Molas), Academia Verlag, Sankt Augustin, pp. 59- 71.

DE LELLIS C. (2017). Il teorema di Schläfli: un invito alla quarta dimensione. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana,* vol. 2, pp. 111-156.

EUCLIDE (1988). *Gli elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni). Torino: UTET.

EUSTACCHI F., MIGLIORI M. (2017). *Per la rinascita di un pensiero critico contemporaneo. Il contributo degli antichi*. Sesto S. Giovanni: Mimesis.

FERREIRÓS J. (2007). ʼΟ Θεος ʻΑριθμητιζει: The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae (*a cura di C. Goldstein, N. Schappacher, J. Schwermer), Springer, Berlin-Heidelberg, pp. 234-268.

FRAJESE A. (1963). *Platone e la matematica nel mondo antico*. Roma-Studium.

GALILEI G. (2011). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali.* Verona: Cierre.

GALILEI G. (2015). *Il saggiatore.* Milano: Feltrinelli.

GARDNER M. (1987). *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles & Diversions.* Chicago: University of Chicago Press.

HARDY G. (2002). *Apologia di un matematico*. Milano: Garzanti.

KEPLER J. (1997). *The Harmony of the World (Harmonices mundi).*

Philadelphia: American Philosophical Society.

MANN T. (2018). *Moniti all'Europa*. Milano: Mondadori.

MUSIL R. (2007). L'uomo matematico. *In Racconti matematici* (a cura di Claudio Bartocci), pp. 289-294. Torino: Einaudi.

PACIOLI L. (2010). *De divina proportione.* Cinisello Balsamo: Silvana.

PIERO DELLA FRANCESCA (1995). *De quinque corporibus regularibus.* Firenze: Giunti.

PLATONE (2000). *Tutti gli scritti* (a cura di G. Reale). Milano: Bompiani.

PLUTARCO (2017). *Tutti i moralia*. Milano: Bompiani.

PROCLO (1978). *Commento al I libro degli «Elementi» di Euclide.* Pisa: Giardini.

VOLTAIRE (2013). *Dizionario filosofico.* Milano: Bompiani.

WEIL S. (2014). *La rivelazione greca.* Milano: Adelphi.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Redazione: Angela Ales Bello, Gian Italo Bischi, Luigi Campanella, Antonio Castellani, Isabella De Paz, Maurizio Lopa
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma - ISSN on-line 2385-1961