Platone e la matematica

Parte I

Antonio Fontana* Agnese Ilaria Telloni** Carlo Toffalori***

DOI:10.30449/AS.v7n14.132

Ricevuto 6-11-2020 Approvato 17-11-2020 Pubblicato 8-12-2020

Sunto: *Esaminiamo e commentiamo la matematica presente nel pensiero e nell'opera di Platone, nella prospettiva di un laboratorio per docenti e studenti delle scuole superiori.*

Parole Chiave: segmenti incommensurabili, solidi platonici, scala del Timeo, numero nuziale.

Abstract: *We examine and comment on the mathematics present in Plato's thought and work. We address in particular high school teachers and students.*

Keywords: incommensurable segments, Platonic solids, Timaeus scale, nuptial number.

Citazione: Fontana A., Telloni A. I., Toffalori C., *Platone e la matematica*, «ArteScienza», Anno VII, N. 14, pp. 161-192, DOI:10.30449/AS.v7n14.132.

* Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; antonio.fontana@unicam.it .
** Università Politecnica delle Marche, Ancona, Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche; agnesetelloni@gmail.com
*** Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; carlo.toffalori@unicam.it .

1 - Introduzione

Proclo visse nel V secolo d. C. e fu matematico e filosofo. Nel suo *Riassunto* – una breve storia della geometria pre-euclidea (Proclo, 1978) –[1] parla di Platone e racconta che egli favorì il massimo incremento delle scienze matematiche «per il suo grande amore verso di esse»: «riempì i suoi scritti di considerazioni matematiche e dovunque destò ammirazione per questa scienza in coloro che studiano filosofia». A confermarlo è pure Aristotele nella *Metafisica*, A, 992 a, 32-b 1 (Aristotele, 2004), che sembra però rammaricarsene. Parlando infatti dell'Accademia platonica, di cui lui pure fu allievo, e della sua situazione alla morte del maestro, si cruccia che le matematiche vi riscuotano fin troppa considerazione e rischino di soppiantare il primato della filosofia.

Ora, Platone non può certo definirsi un matematico. Tuttavia, come Proclo sottolinea, contribuì sostanzialmente allo sviluppo della disciplina, procedendo lungo la "via regia" che da Pitagora conduce a Euclide e Archimede. I suoi dialoghi sono densi di riferimenti matematici e costituiscono in proposito una fonte preziosa.

Un quadro della matematica nell'opera di Platone si trova nel bellissimo libro di Attilio Frajese *Platone e la matematica del mondo antico* (Frajese, 1963).[2] Difficile aggiungere qualcosa a un panorama così esaustivo. Del resto, non pretendiamo nulla di simile. La nostra intenzione, semmai, è di tracciare un itinerario su Platone matematico nell'ottica di un laboratorio ideale, da svolgere in una scuola secondaria, specificamente in un liceo classico o scientifico. Lo proponiamo dunque agli studenti del triennio finale di quegli istituti, che incontrano già Platone nelle lezioni di filosofia e auspicabilmente la geometria classica in quelle di matematica. O meglio: ci rivolgiamo ai loro docenti, e loro tramite agli studenti stessi.

1 Vedi anche (Frajese, 1963, pp. 52-54).

2 È comunque notevole che già nell'antichità ci sia stato chi (Teone di Smirne intorno al primo secolo d. C.) si è preoccupato di raccogliere le conoscenze matematiche utili per comprendere Platone (Petrucci, 2012). Della sua opera però ci restano solo parti dedicate ad aritmetica, musica e astronomia. Una recente proposta dei testi "matematici" di Platone, esaminati dal punto di vista filosofico, si trova poi in (Cavallaro, 2017).

Naturalmente l'invito alla lettura si estende a chiunque desidera un approccio non troppo impegnativo a Platone matematico. Ma la nostra principale speranza è di favorire un qualche confronto – o meglio, socraticamente, un dialogo – tra ragazze e ragazzi di oggi e il filosofo dell'antichità. Molto è cambiato nel mondo e nella scuola negli oltre due millenni che sono trascorsi dalla sua epoca. Ma certi valori, forse i più importanti, restano e l'eredità di Platone rimane attualissima perfino nella matematica e nella sua didattica. Torneremo su questo punto a fine articolo.

Del resto le ragioni a sostegno di questa esperienza laboratoriale sono molteplici. Anzitutto la sua interdisciplinarietà, visto che essa collega non solo matematica e storia del pensiero, ma anche, come vedremo, musica, astronomia, fisica, chimica e storia dell'arte. Ci sono poi due altri punti fondamentali che il laboratorio dovrebbe rimarcare:

1. Anzitutto un'immagine diversa della matematica, intesa non come verità imposta a priori, ma come scienza che si evolve e si arricchisce, si sviluppa nella storia, a cominciare proprio dalla Grecia classica, da Pitagora a Platone, da Euclide ad Archimede, a Diofanto eccetera.
2. Poi il contributo eccezionale che il pensiero greco ha portato a questo progresso, e anzi alla genesi stessa della matematica come scienza.

Si tratta di due aspetti già autorevolmente trattati (Russo, 2001), ma forse non ancora abbastanza estesi e radicati, anzi neppure recepiti come invece dovrebbero. Il laboratorio fornirebbe un'ottima occasione di introdurli ai ragazzi.

Il ruolo di Platone in questo processo è rilevante. Non che l'atteggiamento del filosofo verso la matematica resti sempre uniforme: cambia esso pure col tempo, matura e si affina. Nei dialoghi giovanili cogliamo allora un'attenzione ragguardevole ma senza slanci, a differenza di quelli più maturi, dove invece Platone manifesta un entusiasmo crescente verso la matematica, cui anzi riconosce un ruolo fondamentale nell'educazione dei cittadini e dei governanti. Ci sembra importante proporre ai ragazzi queste sue concezioni, anche per stimolare, come si diceva, la loro riflessione sulla matematica e sulla sua storia. Del resto l'incontro con Platone, a prescindere dalla matematica, è sempre momento di grandissimo fascino: la sua figura ha influenzato e tuttora influenza il pensiero occidentale. Addirittura, secondo il parere di Alfred North Whitehead (1861-1947), autorevole matematico e filosofo inglese, «la caratterizzazione più certa della tradizione filosofica europea è che essa non è altro che una serie di note a margine su Platone» (Whitehead, 1978, p. 39).

L'articolo viene suddiviso in due parti, rispettivamente fino al capitolo quarto compreso e dal quinto in poi. Ha tuttavia una sua intrinseca unità. La struttura complessiva è la seguente. Il prossimo capitolo, il secondo, discute proprio l'importanza della matematica nel pensiero di Platone, così come essa viene descritta in opere come *Repubblica* e *Leggi*. Il terzo, ispirato principalmente dagli stessi due dialoghi, presenta e commenta le concezioni didattiche di Platone, soprattutto a proposito della matematica. Trattiamo poi questioni famose di matematica indagate da Platone:

- nel capitolo quarto i numeri irrazionali (da *Menone*, *Teeteto* e altri dialoghi),
- nel quinto i solidi platonici e il *Timeo*.

Il capitolo sesto costituisce un breve intermezzo che, prendendo ancora spunto dal Timeo, descrive tramite Platone la scienza armonica e musicale degli antichi greci, specificamente della scuola pitagorica. Nel capitolo settimo commentiamo alcuni passi di Filebo e Carmide che anticipano o ispirano Georg Cantor e la sua moderna matematica dell'infinito. Al ruolo di numeri, geometria e proporzioni nell'interpretazione non solo dell'universo ma della stessa società e alle esemplificazioni che Platone ne offre è dedicato il successivo capitolo ottavo. Il nono è una sorta di conclusione, che dibatte l'attualità del messaggio matematico di Platone. L'appendice finale propone un'ulteriore testimonianza della raffinatezza della geometria greca: tratta infatti la curva così detta quadratrice, attribuita a Ippia di Elide, che è pure protagonista di due dialoghi giovanili del grande filosofo.

Assumiamo una qualche confidenza con la figura e col pensiero di Platone e quindi ci limitiamo qui a suo proposito a poche righe di presentazione, per ricordare anzitutto che egli nacque ad Atene e visse dal 427 al 347 a. C. – il periodo dei gravi rivolgimenti che seguirono la sconfitta della sua città nella lunga guerra con Sparta. Fu allievo di Socrate e, come già accennato, maestro di Aristotele. Ad Atene fondò nel 387 a. C. la scuola che ebbe nome Accademia. Ma viaggiò a lungo e soggiornò anche in Italia, principalmente a Siracusa. Arricchì così i suoi contatti con gli esponenti della scuola pitagorica di Taranto.[3]

Dei vari dialoghi platonici che sotto citeremo – protagonista quasi sempre Socrate – rimandiamo all'edizione completa (Platone, 2000). Useremo però talora liberamente altre traduzioni, per esempio quelle di (Frajese, 1963), più attente alla terminologia matematica, o le altre, spesso affascinanti, di Simone Weil in (Weil, 2014).

Un quadro generale della matematica della Grecia classica si trova in (Heath, 1981). Ma riflessioni sul suo ruolo fondamentale nella storia della matematica si leggono in altri classici come (Boyer, 2006) e (Kline, 1999). Segnaliamo anche (Zellini, 1999). Per una vasta analisi di tutto il pensiero platonico suggeriamo (Migliori, 2013) e (Szlezák, 1991). Teniamo a ringraziare Maurizio Migliori, Stefano Isola, Alessandro Della Corte e Gilberto Bini per il loro aiuto e i loro preziosi suggerimenti.

2 - L'importanza della matematica in Platone

La Repubblica è il dialogo in cui Platone espone più estesamente la sua visione politica descrivendo la *kallípolis*, cioè la bella città da lui vagheggiata. A guidarla egli immagina un'aristocrazia, cioè una cerchia ristretta degli uomini migliori, o addirittura un monarca illuminato, il filosofo re. Grazie a queste menti superiori, lo stato sarà «realtà di uomini desti e non sogno di dormienti» (*Repubblica*, 520 c).

3 Come termine di riferimento temporale, sarà opportuno ricordare che Pitagora visse nel VI secolo a. C., Aristotele dal 384 circa al 322 a. C. ed Euclide intorno al 300 a. C.

Nei libri VI e VII di quell'opera, Platone spiega per esteso il contributo della matematica alla formazione di questa classe governante e più in generale di ogni cittadino.

Il suo pensiero si impronta certamente alle concezioni dei pitagorici (Reale, 2006), (Timpanaro Cardini, 2010). Secondo la loro visione il numero è verità – ostile di per sé allo spirito del falso – e quindi sorgente di bene: così si esprimeva già Filolao, tra gli esponenti più influenti di quella scuola.

Anche per Platone aritmetica e geometria, che già fondano la proporzione e l'ordine del cosmo, devono essere impiegate per dirigere e strutturare la vita sociale. L'aritmetica, infatti, è «artefice di persuasione», appunto perché il numero è oggettività, dunque insegna a vivere e a comportarsi: così leggiamo nel *Gorgia* (453 e-454 a). Sempre nello stesso dialogo (507 d-508 a) Platone contrappone la geometria al desiderio spicciolo di possesso e di guadagno. Essa infatti non è solo disciplina da architetti e agronomi, misura di case e terreni, ma ben altro: «unisce uomini e dei», e la sua conoscenza favorisce amicizia, rispetto, saggezza, giustizia. La «uguaglianza geometrica» stabilisce l'equilibrio tra gli uomini: guai dunque a trascurarla.

Tuttavia, per apprezzare al meglio la funzione della matematica nella società sognata da Platone, converrà ricordare in maggior dettaglio le sue teorie sulla conoscenza – come la si raggiunge, raffina e sublima – che troviamo esposte nel libro VI della *Repubblica* (in particolare in 509 d-511 e).

Socrate – protagonista anche in questo caso – vi distingue due livelli diversi di conoscenza: il dominio del sole, cioè il regno del visibile, e il dominio del Bene, che è la dimensione dell'intelligibile. Nel primo separa poi due gradi successivi.

1. Anzitutto quella che stimati commentatori (Szlezák, 2003, p. 90) hanno chiamato la "fede nelle immagini" e "la dipendenza dalle immagini". Ma per Platone l'immagine (in greco, *eikasía*) è solo l'ombra degli oggetti sensibili.
2. Poi, in una fascia più avanzata, la comprensione delle cose naturali – vegetali, animali, manufatti: l'"opinione affidabile" (in

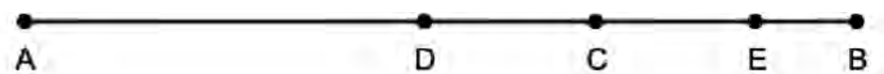
greco, *pístis*).

Il dominio del Bene sta ovviamente al di sopra. In esso si riconoscono ancora due gradi:

1. il primo è quello tipico della matematica, cioè il "pensiero discorsivo" (*diánoia*), che, muovendo da ipotesi e postulati e dalla realtà sensibile della *pístis*, ne astrae concetti e modelli, svolgendo argomentazioni e dimostrazioni;
2. c'è finalmente, al culmine della costruzione l'"intelligenza pura" (*nóesis*), fondata non più sulla matematica ma sulla *dialettica*: è il reame della filosofia, che supera ogni particolarismo e conduce all'essere, alla pienezza della comprensione di sé e dell'universo, al dominio delle cose, al Principio che sussiste senza più ipotesi.

Per illustrare ancor più chiaramente la sua concezione e approfondire la similitudine tra sole e Bene, Platone si affida (sempre tramite Socrate) alla metafora della *linea* e della sua geometria. Invita quindi il lettore a tracciare idealmente un segmento AB, da suddividere poi in parti diseguali AC e CB tramite un punto intermedio C, in modo tale che

- la più lunga AC venga a denotare gli oggetti visibili,
- l'altra più corta CB quelli intellegibili.



Procede poi a un'ulteriore ripartizione attraverso due altri punti D ed E, appartenenti rispettivamente ad AC e CB, in modo che i quattro segmenti più piccoli così ottenuti rappresentino i livelli sopra individuati:

- AD il mondo delle immagini,
- DC quello degli oggetti sensibili,
- CE il livello del pensiero matematico,

- EB il regno delle idee e della vera intelligenza.

I quattro segmenti, rappresentando il progressivo distacco dal mondo sensibile, si rarefanno progressivamente, cioè si accorciano in lunghezza. Anzi, la linea AB si dovrebbe figurare come tracciata in verticale, salendo dalle realtà sensibili che cambiano, vivono e muoiono alla luce del Principio pieno, quindi dall'oscurità alla chiarezza. Si stabilisce poi la proporzione

$$AC : CB = AD : DC = CE : EB.$$

Se dunque per semplicità ammettiamo che il rapporto comune di queste coppie di segmenti sia 3 : 1 e che AC, CB misurino rispettivamente 12 e 4, la proporzione, espressa in termini numerici, diventa 12 : 4 = 9 : 3 = 3 : 1. Ma anche a prescindere da questo caso particolare, dal testo di Platone si evince – e il filosofo sembra lasciare al suo lettore l'esercizio di dedurlo – che i due segmenti di mezzo, DC e CE sono ugualmente lunghi,[4] a sottolineare il legame che persiste tra la percezione delle immagini e le conseguenti considerazioni teoriche, tra le figure e gli enti geometrici.

Individuato così il pensiero discorsivo come ultimo stadio per l'accesso alla pienezza della conoscenza, Platone elenca e discute nel libro VII le scienze che contribuiscono ad acquisirlo, dunque i cardini supremi dell'educazione. Sono cinque, tutti legati alla matematica, ordinati nel modo che segue.

1. Anzitutto l'aritmetica (522 c-526 c) che lui chiama "scienze del calcolo e del numero": «capace di portare l'uomo alla verità», disancorandolo dai meri conteggi degli oggetti visibili per condurlo al ragionamento puro e all'equilibrio dei numeri in sé.
2. C'è poi la geometria (piana, 526 c-527c) che manifesta «l'idea del

4 Oggi giorno la soluzione è semplificata dal linguaggio algebrico: se indichiamo con a, b le misure di AC e CB e con x, y quelle incognite dei segmenti DC e CE da confrontare, ricaviamo la duplice proporzione $a : b = (a - x) : x = y : (b - y)$. Da $a : b = (a - x) : x$ si deduce $ax = b(a - x)$ da cui facilmente $x = ab \,/\, (a + b)$. Allo stesso modo da $a : b = y : (b - y)$ si ottiene nuovamente $y = ab \,/\, (a + b)$. Così, in definitiva, $x = y$.

bene» e collabora ugualmente a condurre l'anima al vero. Anche in questo caso però la geometria più autentica trascende gli aspetti tecnici (le procedure per quadrare, prolungare eccetera) e introduce invece a ciò che è immutabile ed eterno.

3. Segue la stereometria, cioè la geometria solida, che accede alla terza dimensione, ai cubi e agli «oggetti che hanno profondità» (528 a-d).
4. L'astronomia (528 e-530 c) è invece lo studio degli stessi solidi, ma in movimento, dunque l'analisi dei corpi celesti, dei loro rapporti numerici e delle loro figurazioni. A guidarla però deve essere non la vista, ma la ragione, che ne trae ispirazione per muovere anche stavolta alla ricerca dei modelli invisibili (si consideri a questo proposito il racconto della cosmogonia del *Timeo*, di cui riferiremo nei capitoli 5 e 6).
5. V'è poi l'armonia (530 c-531 c), cioè lo studio della musica, che però, nuovamente, non può limitarsi al mero esercizio dell'udito, all'inutile ricerca di suoni, accordi e scale, ma elevarsi all'individuazione dei numeri armonici, alla «ricerca del bello e del bene».
6. Al di sopra di queste discipline sorelle sta poi, come s'è già indicato, la dialettica: secondo Platone, musica puramente intellegibile e coronamento di ogni scienza.[5]

La supremazia della dialettica, cioè della filosofia, sulla matematica è affermata in diverse occasioni da Platone: nello stesso libro VII della *Repubblica* (533 b-d) viene puntualizzato che la geometria e le discipline affini non possono aspirare a diventare *epistéme,* cioè scienza indubitabile, perché si sviluppano sulla base di ipotesi iniziali che non vengono mai sottoposte a vaglio.

Nell'*Eutidemo* si propone poi una similitudine suggestiva tra geometri, astronomi e calcolatori da un lato e dall'altro cacciatori e pescatori, che passano la loro selvaggina o pescagione ai cuochi

5 Non l'unica tuttavia a occupare questo culmine. Nella *Lettera VII* Platone le affianca la *nóesis* e la *dóxa* – quest'ultima da intendersi in questo caso come opinione certa e formata, cioè come l'assenso dell'anima ad affermazioni riguardanti non solo la realtà sensibile. Si potrebbe poi considerare il ruolo del *noûs*, ossia la conoscenza intuitiva delle realtà eterne, resa possibile perché divina.

perché la cucinino. Allo stesso modo i matematici trovano le figure che già esistono ma poi le consegnano ai dialettici, che sanno come interpretarle.

E tuttavia la matematica risiede nell'ultima anticamera al regno della filosofia. Il libro X della *Repubblica* stabilisce per esempio esplicitamente (in 600 a-b) la superiorità sua, e più in generale dell'approccio pitagorico all'educazione, sulla poesia (oggi diremmo su certa cultura umanistica). Confronta infatti Omero e Pitagora, e si chiede se, almeno nella vita privata, il primo sia stato davvero «maestro di educazione per qualcuno che abbia poi preso ad amarlo e a frequentarlo, e che abbia lasciato ai posteri un modello di "vita omerica"», come invece è risultato Pitagora, che fu invece «straordinariamente […] amato e seguito […], tanto che i discepoli hanno creato quel modello di "vita pitagorica" che ancora oggi è praticato e che rende famosi tra gli uomini i suoi seguaci».

A onore del vero, l'atteggiamento di Platone nei confronti della poesia sembra negativo in assoluto, e non solo a confronto con la matematica. Il libro X della *Repubblica* (598 d-601 b) pare condannarla senza appello, accusandola di mancare di contenuti, ripudiare la verità, suscitare troppe emozioni. Giudizio analogo si dà della pittura (602 d-e), cui si rimprovera di perpetrare ogni possibile inganno «con le sue ombre e le sue sfumature», «in modo del tutto simile agli artifici della magia».

Ma lo stesso Platone nell'altro dialogo giovanile, *Ione* (530 b), celebra Omero come "il migliore e il più divino dei poeti". La sua posizione nei confronti dell'arte e in particolare della poesia non è quindi soltanto ostile. Il filosofo ritiene però che esse rivelino la loro bellezza nella misura in cui contribuiscono al bene, all'armonia, all'equilibrio, alla crescita dell'individuo e quindi rifuggono smancerie e sentimentalismi. In Platone il bello è una categoria intellettuale e non estetica; manifesta il bene, che ha però il primato; va quindi alla ricerca di "numero, misura, peso". È dunque bella la scienza, ed anzi è della scienza «il grande oceano della bellezza», come leggiamo in una pagina emozionante del *Simposio* (210 c-d); ma è bella anche l'arte, purché corrisponda a questi principi. Si dice ad esempio nel *Protagora* (146 d-e) che la vera saggezza è «arte e sapienza misuratrice» (*metretiké téchne kái epistéme*) cioè, in definitiva, "aritmetica" (*arithmetiké*).

Quanto all'oggettività della matematica, e in particolare dell'aritmetica appena menzionata, ci piace citare un altro passo platonico che la celebra, ed è giustamente sottolineato in (Frajese, 1963). Sembra quasi anticipare la celebre esortazione *"Calculemus!"* di Gottfried Leibniz (1646-1716) e la speranza, o forse l'utopia, che un approccio matematico alle discussioni favorisca la concordia tra gli uomini. Si trova nell'*Eutifrone* (7 b-c), dove Socrate pone al suo interlocutore proprio il seguente interrogativo:

> Se, dovendo stabilire quale di due numeri sia più grande, io e te non fossimo d'accordo, questa differenza d'opinione ci renderebbe forse nemici e ci farebbe entrare in collera l'uno con l'altro; oppure verremmo al calcolo e ci metteremmo presto d'accordo?

Un altro tratto della matematica che vari dialoghi, e in particolare le *Leggi*, risaltano è la sua aura di aristocraticità. Esistono anzi due matematiche, o due maniere differenti di accostare la matematica: una per il popolo, cioè per i molti, e una per i filosofi, cioè per i migliori. Per esempio, come già sappiamo, bisogna distinguere tra l'aritmetica grossolana e consuetudinaria di un commerciante e l'altra più autentica che contempla i numeri del cosmo. Allo stesso modo, vanno distinte le misurazioni degli architetti e dei muratori dalla geometria dei filosofi, che ricerca le proporzioni dell'universo. È questa la differenziazione che, già presente nella *Repubblica*, Socrate propone pure nel *Filebo* (56 d-57 a) e nel *Gorgia* (451 a-c).

Non che la prima accezione della matematica, quella che oggi definiremmo applicata, sia da disprezzare. Nello stesso *Filebo* se ne sottolineano l'utilità e il valore. Si domanda infatti se il possesso della scienza possa ridursi alla «conoscenza razionale del cerchio e della sfera divina in sé» e quindi ignorare la «sfera umana», almeno quando adopera regoli e cerchi «per la costruzione di case e per altre opere analoghe».

Ma l'altra matematica è ovviamente superiore. Viene qui in mente, a distanza di millenni da Platone, il passo famoso di Georg Cantor (1845-1918) nelle *Grundlagen* del 1883 (*Fondamenti di una teoria* *generale delle molteplicità*) (Cantor, 2012, pp. 98-100) in cui si esalta la matematica pura per «il soffio vivificante» che in essa può sprigionare il pensiero. È in queste righe che Cantor scrive la frase famosa che «l'essenza della matematica […] sta proprio nella sua libertà», negando peraltro la stessa capacità e lo stesso diritto alla scienza applicata, fatalmente vincolata dallo studio della natura e troppo preoccupata dall'obbligo di effetti concreti.

Ma torniamo all'aristocraticità della matematica. La troviamo espressa, come già si diceva, nelle *Leggi*, libro VII, 817 e-818 a. Nel passo in questione non si manca di ribadire che per chiunque è vergognoso ignorare questa scienza, e chi lo fa «è molto lontano dal divenire divino». E tuttavia si ammette che su aritmetica, geometria (piana e solida) e astronomia – nella versione più elevata – «non devono affaticarsi i molti, ma solo certi pochi». Tra l'altro, un doppio livello di iniziazione alla matematica era anche previsto dalla scuola pitagorica. E in Platone tutto è almeno duplice: comprese matematica e poesia.

3 - L'educazione alla matematica in Platone

Vediamo adesso come Platone intende l'insegnamento, in particolare quello della matematica: in modo moderno, possiamo dire, tutto meno che cattedratico.

Per lui infatti l'educazione rappresenta «l'arte di produrre un rivolgimento» (*periagoghé*) negli allievi; non dunque un trasferimento di conoscenza, ma il tentativo di promuovere un atteggiamento attivo in chi impara, valorizzando la capacità di apprendere che ciascuno ha dentro di sé.[6] Come Socrate ricorda nel *Simposio*, 175 d-e,

6 Il passo a cui facciamo riferimento, che può essere interessante analizzare insieme agli studenti, è in *Repubblica*, 516 b-d: "«L'educazione non è come la definiscono certuni che si professano filosofi. Questi […] affermano di instillare (*entíthemi*) la conoscenza (*epistéme*) in un'anima che non la possieda, come si metterebbe la vista in occhi ciechi. […] L'educazione, dunque, è l'arte di produrre questo rivolgimento, e produrlo nel modo più facile e più proficuo, non quella di immettere nell'uomo la facoltà visiva, ma di procurare a chi già possiede la vista, ma è volto male e non guarda dove dovrebbe, la possibilità di questa conversione».

la conoscenza non può essere travasata come acqua, dalla coppa più piena alla coppa più vuota; il maestro deve piuttosto aiutare l'allievo a ritrovarla nel suo intimo. L'anima deve essere indotta a rivolgersi all'universale, abbandonando progressivamente la realtà contingente per contemplare l'essere, secondo la linea della conoscenza.

Un modello famoso di questo approccio formativo è la lezione di matematica cui assistiamo nel dialogo *Menone*. Nell'occasione Socrate svolge una sorta di esperimento didattico, una specie di laboratorio di geometria rivolto a un giovane schiavo del suo interlocutore, che è appunto Menone. Nel capitolo successivo approfondiremo gli aspetti matematici di questo colloquio. Qui però ne esaminiamo gli spunti didattici.

L'argomento generale del dialogo è la virtù: se e come la si può insegnare e apprendere. Tale è l'interrogativo che a Socrate viene posto da Menone. Questi era un giovane molto partecipe del mondo intellettuale dell'epoca, dominato peraltro dai sofisti; aveva poi qualche dimestichezza con la matematica. I toni che egli usa nel colloquio sono però critici e saccenti. Menone rimprovera a Socrate di eludere anziché affrontare le questioni, di spargere dubbi piuttosto che seminare certezze, di porre domande piuttosto che esporre conclusioni, di irretire così chi gli parla, di incantarlo, ammaliarlo, intorpidirlo come fanno le torpedini marine (80a-e).

Il filosofo si difende: il suo metodo educativo muove dalla premessa non v'è nulla che l'anima umana, perché immortale, non abbia già incontrato e appreso già prima di venire al mondo. Gli interrogativi e l'approccio dialogico servono allora a risvegliare la reminiscenza e con essa la scienza. Proprio per avvalorare questa sua tesi, Socrate propone a Menone di interrogare un suo giovane schiavo, digiuno di ogni elemento di geometria, certo di stimolare nel ragazzo, non con un insegnamento imposto per forza, ma proprio con le sue domande, quelle conoscenze che già gli appartengono, innate, per natura.

In un altro dialogo, il *Teeteto*, 149 a-151 d, Socrate spiega chiaramente quella che intende come la sua missione: esercitare l'arte maieutica che fu della madre Fenarete, «levatrice famosa e abile», per aiutare però non le donne a partorire figli, ma chi a lui si affida a generare il pensiero. Il contesto è quindi leggermente diverso dal *Menone*, dove l'intento è, come si diceva, suscitare il ricordo – sia pure un ricordo *sui generis*, una sorta di capacità a priori che domande o esperienza attivano più o meno, a seconda delle capacità del soggetto.

Ma in entrambi i casi, nel *Teeteto* come nel *Menone*, si propugna un approccio didattico o conoscitivo che è fondato sulla conversazione e sulla ricerca comune della verità.

Il metodo dialogico di Socrate era verosimilmente lo stesso seguito da Platone nella sua Accademia. L'educazione vi era vista come bussola dell'anima, capace di orientarla e indicarle «il modo più facile ed efficace di muoversi nel campo della conoscenza» (*Repubblica*, 518 d).

Non a caso il colloquio del *Menone* tratta questioni di geometria. Secondo Platone, infatti, l'educazione non può che riservare, per le ragioni giù espresse, ruolo preminente alla matematica. Lo studio della quale, sempre a suo parere (*Repubblica*, 525 b-c), va prescritto per legge e richiesto in modo ancor più esigente ai futuri governanti. Tanto egli auspica sia per l'aritmetica che per la geometria: la loro conoscenza, per quanto dura e faticosa, va tuttavia pretesa, specie dai più dotati. L'una e l'altra, aritmetica e geometria, così come le altre scienze che educano al pensiero discorsivo e introducono alla dialettica, «devono […] essere apprese fin dalla fanciullezza» (536 d-537 a).

Nei modi dovuti, però, perché – la premura ritorna – l'istruzione non si può imporre come una schiavitù e «nessun insegnamento impartito a forza attecchisce e resta stabilmente acquisito». Al contrario, tutto ha da avvenire con "la spontaneità di un gioco", che favorisca e manifesti le predisposizioni di ognuno.

Analoghe raccomandazioni si leggono nelle pagine delle *Leggi*. Le matematiche, nessuna esclusa, vanno apprese sin da ragazzi perché utili a «ogni arte d'uomo», o per svegliare «chi è tardo per intelligenza e ottuso per natura»: non tuttavia per scaltrire, ma per progredire verso "l'arte divina" (747 b-c). Inoltre l'educazione deve essere gradevole e attraente. Proprio nelle *Leggi*, 819 b-c, Platone ricorda a questo proposito l'esempio dell'Egitto, dove i calcoli aritmetici e combinatori sono proposti ai bambini "unitamente al gioco e con diletto", con l'aiuto di "mele e corone" e quant'altro.

È giusto semmai aggiungere che Platone non manifesta eccessiva fiducia nella sensibilità culturale dei governi del suo tempo. Esprime anzi chiarissimamente (nel libro VII della *Repubblica*, 528 b-c) la sua preoccupazione per lo stato pietoso in cui versa la scienza della sua epoca. Lamenta che nessun politico se ne dà pensiero e che, del resto, gli stessi scienziati eccedono in "spocchia e particolarismi" e "vogliono fare di testa loro" senza coordinarsi in un'organizzazione concorde della ricerca. Insomma, verrebbe da commentare, non c'è mai nulla di nuovo sotto il sole.

4 - I numeri irrazionali

Cominciamo adesso a esporre e commentare alcuni dei principali argomenti di matematica trattati da Platone nei suoi dialoghi. Iniziamo proprio dal *Menone* e dal colloquio già citato, che lì avviene tra Socrate e un giovane schiavo (82b-86c). Ne conosciamo le motivazioni generali. Approfondiamo allora gli aspetti geometrici.

La questione che si affronta riguarda un quadrato ABCD di lato assegnato AB, nel caso specifico di misura 2. Il quadrato ha quindi area 4. Socrate lo disegna, probabilmente col piede sulla sabbia del terreno. Il problema proposto al ragazzo è come ottenere il lato di un quadrato di area doppia, cioè 8. Oggi verrebbe facile affermare che va costruito un segmento di lunghezza $2\sqrt{2}$. Ma ci affideremmo così a un punto di vista aritmetico e ad una qualche dimestichezza con i numeri irrazionali, specificamente con $\sqrt{2}$ che gli antichi greci non possedevano – non almeno nei nostri stessi termini. La loro sensibilità privilegiava un approccio principalmente geometrico alla matematica. E geometrica è la via che Socrate, appunto, persegue.

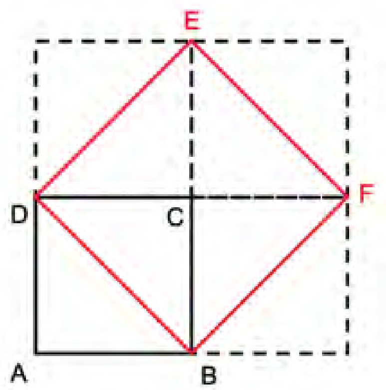
Ma procediamo con ordine, seguendo il corso del dialogo. La premessa socratica – lo ricordiamo – è che, se allo schiavo manca la piena conoscenza, tuttavia egli possiede dentro di sé piena capacità di comprendere. L'anamnesi, cioè la reminiscenza, diviene conoscenza attraverso il processo che proprio in questa narrazione viene fatto intravedere.

In verità, nella sua prima risposta il giovane schiavo sembra affidarsi con qualche sicumera alla soluzione più ingenua: ritiene che, se l'area raddoppia, altrettanto faccia il lato. Avvisato da Socrate che un lato di lunghezza 4 genera un quadrato di area 16 e non 8, ripiega di conseguenza sul valore 3, che è minore di 4 e perciò apparentemente più ragionevole. Dopo aver però constatato che neppure la soluzione 3 è corretta, perché la corrispondente area 9 è ancora sbagliata per eccesso, sembra arrendersi: «Per Zeus, Socrate, non lo so davvero!».

Ma il filosofo interpreta in modo positivo questo momentaneo scoraggiamento. È una tappa sulla via della reminiscenza; supera la faciloneria della prima reazione e rivela un più intenso desiderio di capire. Pur intorpidito, lo schiavo è tuttavia più consapevole: «Non sapendo, neppure crede di sapere».

Così la ricerca riparte. Socrate invita il ragazzo a:

- considerare un quadrato più grande, costituito da 4 quadrati adiacenti, tutti uguali a quello di partenza;
- tracciare le diagonali di ciascuno di loro;
- riconoscere nel poligono che esse delimitano un nuovo quadrato, che è metà di quello più grande e quindi doppio di quello originario.



Quindi il lato cercato si rivela proprio come la diagonale DB del primo quadrato.

Qui si ferma la sperimentazione di Socrate, e perfino Menone deve ammettere che il giovane schiavo è arrivato da solo alla conclusione, senza che nessuno gliela abbia comunicata o imposta. Riconosce perciò la bontà dell'approccio seguito.

Come già si accennava, agli studenti di oggi verrà naturale collegare il problema così discusso al teorema di Pitagora: infatti DB è l'ipotenusa del semiquadrato, cioè del triangolo rettangolo isoscele con cateti AB = DA. Dunque, proseguendo l'esercizio con gli strumenti matematici di adesso, sapranno ben concludere quanto già preannunciato e cioè che, se questi lati AB e DA hanno misura 2, la lunghezza di DB sarà $2\sqrt{2}$.

Socrate e lo schiavo però, secondo la sensibilità del tempo, si fermano all'aspetto geometrico. Non affrontano la parte aritmetica e specificamente la natura di questo nuovo "numero" $\sqrt{2}$ irrazionale, come riscopriremo tra poco, cioè non esprimibile come frazione di interi.

Non però che il delicato problema sottostante, cioè l'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato (o, se si preferisce, tra cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele), fosse sconosciuto agli antichi greci. Essi pure erano in qualche modo consapevoli, sin da tempi di Pitagora e quindi prima di Platone, della "irrazionalità" di $\sqrt{2}$.

Converrà allora esaminare con calma la questione insieme agli studenti, ricordando anzitutto che due segmenti si dicono commensurabili se ammettono un sottomultiplo comune, dunque se esiste un segmento che entra nell'uno e nell'altro un numero preciso di volte, diciamo, rispettivamente, l e d con l, d interi positivi. Si dirà allora che l/d, un numero razionale, cioè una frazione, è il rapporto tra i due segmenti. Magari si osserverà che il discorso si può estendere facilmente a una coppia qualsiasi di grandezze omogenee, non solo lunghezze. La commensurabilità è dunque una relazione binaria tra queste grandezze, che fa riferimento all'atto concreto del misurare. Per il quale però servono anche i numeri, come appunto la frazione l/d appena considerata.

Capita però, e il caso del lato e della diagonale di un quadrato ce lo conferma, che si incontrino grandezze, nella fattispecie segmenti, che commensurabili non sono.

Sarà opportuno spiegare a questo punto come i greci percepirono la rivoluzione, potremmo dire lo scandalo, dell'esistenza di lunghezze incommensurabili proprio a proposito di lato e diagonale del quadrato: una «intrusione concettuale inquietante», la definisce Paolo Pagli (Toth, 2018, *Introduzione*).

Aristotele parla dell'argomento negli *Analitici Primi* (Aristotele, 2016), per esempio in I, 23, 41a 23-31, e accenna a una possibile dimostrazione "per assurdo", che assume lato e diagonale commensurabili e ne deduce che «i numeri dispari sono uguali ai numeri pari», ossia una contraddizione. Accredita così l'affermazione opposta, che lato e diagonale sono incommensurabili.

Una dimostrazione esplicita in questa direzione si trova negli *Elementi* di Euclide (Euclide, 1988), nel libro X, per la precisione nell'appendice 27, la quale in verità rappresenta uno scolio controverso e non sempre accettato – è incluso tuttavia nell'edizione classica dell'opera, curata dal grecista danese Johan Heiberg (1854-1928) tra fine Ottocento e inizio Novecento. C'è però chi rileva come l'argomento in questione da un lato ricorra al concetto di numeri interi "primi" tra loro e dall'altro applichi due volte il procedimento per assurdo: come dire "troppa grazia", perché l'uno e l'altro espediente si possono evitare in un approccio più elementare.[7]

Una prova più diretta, verosimilmente quella che aveva in mente Aristotele, si può sviluppare nel modo che adesso esponiamo.

Si assume ancora un minimo di aritmetica: in forma debole, il così detto teorema fondamentale che, di ogni intero $N > 1$, assicura l'esistenza e l'unicità della decomposizione in fattori primi. Qui però è sufficiente considerare la massima potenza con cui 2 compare in questa rappresentazione di N, quindi il massimo esponente di 2 nella decomposizione o, per dirla in termini ancora più semplici, il massimo numero di volte che 2 divide N. Chiamiamo questo numero l'altezza di N (in base 2). Per esempio l'altezza di 24 è 3 perché 24 è

7 Ricordiamo che, nella procedura per assurdo, per dimostrare un'affermazione, si considera la sua negazione e, deducendo da questa una contraddizione, si presume di aver provato l'affermazione di partenza. Questa strategia è tra quelle predilette da Euclide. Non meraviglia allora che qui ne faccia duplice uso.

divisibile per $8 = 2^3$ ma non per $16 = 2^4$, infatti $24 = 2^3 \times 3$.

È facile osservare che, se il numero N è elevato al quadrato, allora la sua altezza raddoppia. Più in generale, l'altezza di un prodotto coincide con la somma delle altezze dei fattori.

Consideriamo adesso:

- un quadrato EFGH,
- il quadrato ABCD che ha per vertici i punti medi dei lati del quadrato precedente.

Osserviamo che il primo quadrato ha area doppia del secondo. Concentriamo la nostra attenzione su quest'ultimo, cioè su ABCD, e notiamo che il lato EF di EFGH è uguale alla sua diagonale AC. Supponiamo allora commensurabili:

- il lato AB di ABCD,
- la diagonale di ABCD, dunque EF.

Questo significa che esistono due interi positivi l, d e un sottomultiplo comune di AB ed EF che entra

- l volte in AB,
- d volte in EF;

come dire che il rapporto dei due segmenti è l/d.

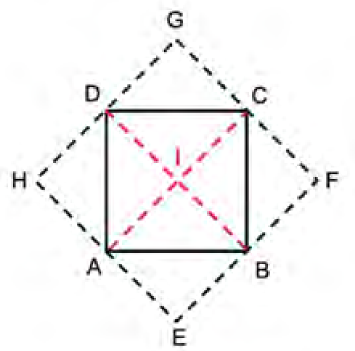
Da quanto abbiamo osservato prima sulle aree dei due quadrati, si ricava $d^2 = 2l^2$.

Il quadrato d^2 ha altezza doppia di d, dunque pari. Ma il numero di volte con cui 2 compare invece in $2l^2$ coincide con l'altezza di l^2 (essa pure pari!) più 1 (il fattore 2 esterno), dunque è dispari. Si arriva così a una contraddizione, perché si è costruito un numero contemporaneamente pari e dispari. Se ne desume che AB ed EF sono incommensurabili.

La stessa conclusione si può raggiungere per una via ancor più geometrica, che evita il ricorso all'altezza – pur adoperando di nuovo qualche proprietà fondamentale degli interi positivi. Per questo motivo può essere utile proporla ai ragazzi, paragonandola alla precedente.

L'argomento si trova esposto in (Zellini, 2018, pp. 131-132), vedi anche (Zellini, 1999). Procede così, muovendo dal medesimo contesto della dimostrazione precedente, in particolare dall'ipotesi che AB ed EF sono commensurabili. Stabilito che d è pari e posto di conseguenza $d = 2d'$ per un qualche intero positivo d', si prende atto che quest'ultimo, cioè d', determina la lunghezza di BE, che è la metà di EF. Si nota poi che:

- BE è commensurabile con AB,
- BE, AB costituiscono rispettivamente lato e diagonale del nuovo quadrato AEBI.



Inoltre $d' < l < d$.

Si è così generato un nuovo quadrato AEBI, che rispetto ad ABCD ha diagonale più piccola, e nel quale lato e diagonale sono commensurabili.

Dal punto di vista geometrico, questa costruzione si può ripetere quante volte si vuole, all'infinito, producendo quadrati che ammettono lati e diagonali sempre più piccoli, eppure commensurabili. Ma, aritmeticamente parlando, la procedura si deve interrompere, perché ogni sequenza strettamente decrescente di interi positivi $d > l > d'$ termina entro un numero finito di passi, non potendo scendere sotto 1.

Questo procedimento iterato di progressivo confronto e conseguente riduzione a casi più "piccoli" richiama la tecnica chiamata "antifairesi" (Aristotele, 2016, *Topici*, 158 b) o "antanairesi" (Zellini, 1999, pp. 178-179). Si noti che questa seconda parola richiama etimologicamente in greco l'idea sia di contrasto e antagonismo (*antí*) che di ripetizione (*aná*).

L'antanairesi è la strategia dell'algoritmo euclideo.

Se applicata ai numeri interi positivi per il calcolo del massimo comune divisore, come nelle proposizioni 1 e 2 del libro VII degli *Elementi* (Euclide, 1988), ha forzatamente fine: infatti, a partire da due di questi numeri, diversi tra loro, al primo passo sottrae il minore dal maggiore tante volte quant'è possibile, poi ripete la procedura tra il numero minore e il resto, e così via, ma ha la certezza di arrivare prima o poi a una fine, appunto per l'impossibilità di protrarsi sotto 1.

Tuttavia, se trasferita a segmenti, come Euclide fa nelle proposizioni 2 e 3 del libro X, la stessa strategia si conclude talora con successo e talora no. La prima eventualità corrisponde proprio ai casi di commensurabilità, che sono regolati dai numeri interi – tant'è che Aristotele, nel passo citato dei *Topici*, definisce in rapporto proprio quelle grandezze che «hanno la stessa antanairesi». La seconda si registra nei fenomeni di incommensurabilità.

Tutte queste considerazioni su commensurabilità e incommensurabilità si leggono in opere successive, sia pure di poco, a Platone. Ma la problematica era ben viva anche al suo tempo, come il *Menone* ci ha testimoniato. Il discorso delle radici quadrate torna poi nell'altro dialogo *Teeteto* in ambito ancor più generale. Si passa infatti da 2 a esaminare 3, 5, 7 o comunque numeri interi positivi che non sono quadrati perfetti. Pure nel loro caso si tratta di costruire geometricamente il lato di un quadrato che ammette un tale valore 3, 5, 7 ecc. come area.

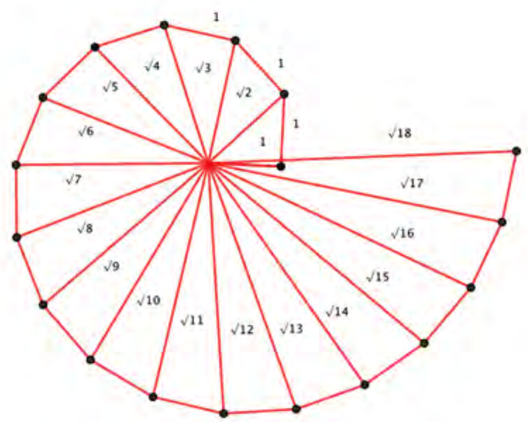
Il collegamento col teorema di Pitagora permane, per esempio grazie alla seguente costruzione.

Dal triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza 1 si ottiene, come sappiamo, un'ipotenusa di misura $\sqrt{2}$.

Considerandola come cateto di un nuovo triangolo rettangolo, insieme a un altro lato ancora di lunghezza 1, si deriva stavolta un'ipotenusa di misura $\sqrt{3}$.

Iterando il procedimento si producono successivamente ipotenuse di lunghezza dapprima $2 = \sqrt{4}$, ma poi $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ e via dicendo: tutte le radici quadrate di interi positivi si ottengono geometricamente.

La seguente figura a chiocciola (chiamata, per motivi che presto vedremo, spirale di Teodoro) illustra la procedura, ma ne evidenzia anche i limiti: arrivati a 17, i triangoli cominciano a sovrapporsi e il disegno geometrico, invece che aiutare, confonde.



Esiste però un legame ancora più forte e intrigante tra radici quadrate e geometria. Corrisponde al gusto pitagorico del rapporto e della proporzione. Infatti la radice di un intero positivo N è il medio proporzionale tra il numero stesso e l'unità 1. Algebricamente parlando, si presenta infatti come la soluzione (positiva) della proporzione

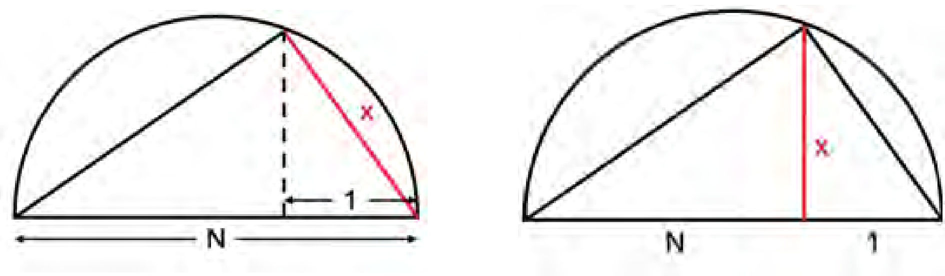
$$1 : x = x : N .$$

Per esempio, quando N è un quadrato perfetto, cioè $N = a^2$ per qualche intero positivo a, allora è proprio questo a il medio proporzionale, avendosi $1 : a = a : a^2$. Altrimenti, se N non è un quadrato perfetto, la ricerca di x equivale in senso aritmetico a quella della radice quadrata di N.

Ma alla proporzione dei numeri un'altra ne corrisponde, riguardante i segmenti che hanno quei numeri come misure. Il problema diventa allora geometrico e richiede la costruzione esplicita di un segmento di lunghezza x a partire da quelli di misura rispettivamente 1 e N. A fornire una tale procedura provvede uno qualsiasi dei due famosi teoremi così detti di Euclide, entrambi racchiusi nella Proposizione 8 del libro VI degli *Elementi* (Euclide, 1988).

Infatti nel primo x si ottiene come la lunghezza del cateto la cui proiezione sull'ipotenusa ha misura 1, assumendo che l'ipotenusa stessa sia lunga N.

Nel secondo x si ricava come la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa, assumendo che N e 1 misurino le proiezioni sull'ipotenusa dei due cateti.



Tra l'altro, entrambe queste costruzioni si ottengono con riga e compasso, perché i triangoli rettangoli coincidono esattamente con quelli inscrivibili in una semicirconferenza.

Il ruolo fecondo dei medi proporzionali è celebrato in abbondanza da Platone. Simone Weil (1909-1943), che fu celebre pensatrice oltre che sorella di un grande matematico, André, menziona in proposito (Weil, 2014, Discesa di Dio, p. 264) il passo del *Timeo* (31 c-32 a) dove il filosofo elogia con toni affascinanti la proporzione geometrica $1 : x = x : N$, in cui il medio x interviene come ponte tra l'unità e N: «Tra due, finché sono soltanto due, è impossibile che la congiunzione sia bella senza un terzo. Bisogna che, tra loro, in mezzo si generi un legame che li conduca all'unione. Il più bello dei legami», quello che più appaga l'anelito di equilibrio, «è quello che rende perfettamente "uniti" un se stesso e i termini legati. Per un tale compimento la proporzione geometrica è per sua essenza la più bella» perché in essa, necessariamente, tutti i termini «perverranno a essere identici; e, divenuti mutuamente identici, essi saranno uno».

La Weil prosegue la sua riflessione, rilevando e celebrando la funzione che a suo avviso la proporzione geometrica riveste nella musica e perfino nella teologia cristiana. Opinione, questa ultima, di cui si può discutere. Ma all'aspetto musicale dedicheremo espressamente uno dei capitoli della seconda parte del lavoro.

Torniamo comunque al *Teeteto*. Ricordiamo che quel dialogo inizia con un commosso omaggio al protagonista, morente perché gravemente ferito in battaglia. Di lui si rammenta un dialogo che egli ebbe, da giovane, col suo maestro Teodoro e con Socrate. Questo Teodoro era uno dei grandi matematici del tempo, studioso di gran fama di geometria, astronomia, aritmetica e musica. La questione generale che i tre dibattono conversando è la natura della scienza. Ma un breve inciso del loro colloquio si concentra proprio sulle radici quadrate, considerate di nuovo sia aritmeticamente che, soprattutto, geometricamente.

Teeteto riferisce che Teodoro ha stabilito l'incommensurabilità del lato di un quadrato di area N (dove N è un numero naturale che va da 3 a 17 ma non è un quadrato perfetto) col segmento di misura 1 – dunque, per dirla in termini aritmetici moderni, l'irrazionalità delle radici quadrate di questi numeri N. Non si parla, come già preannunciato, di $N = 2$, probabilmente perché quel caso è già esaminato nel *Menone*. Sul motivo poi per cui l'analisi di Teodoro si arresti a 17, varie congetture sono state avanzate. Una di questi ipotesi è riferita in (Frajese, 1963) a pagina 163 e sostanzialmente rileva quanto abbiamo già evidenziato, cioè che la costruzione a chiocciola prima presentata, attribuita appunto a Teodoro, finisca per ingarbugliarsi arrivando a 17.

Teeteto però, con l'esuberanza spavalda e ingenua che è tipica dei giovani, proclama d'aver superato il maestro e d'aver trovato una soluzione generale del problema, valida per ogni N. Afferma che il lato cercato è commensurabile se e solo se la sua lunghezza è un quadrato perfetto. Ma anche nell'altro caso, quando N non è un quadrato, Teeteto è riuscito a denotare geometricamente la sua radice: tramite non più un segmento, ma una superficie, quella del rettangolo di lati 1 e *N*. Teeteto chiama rettangoli questi numeri, corrispondenti ad aree e non a lunghezze, e li distingue dagli altri numeri quadrati.

È verosimile che lo stesso Teeteto, che divenne lui pure, in seguito, matematico illustre, abbia ripreso nella maturità l'idea qui proposta in forma ancora grezza, contribuendo al chiarimento dell'intera teoria. Questa si trova esposta mirabilmente ancora negli *Elementi* di Euclide, nella proposizione 9 del libro X, ove si enuncia e dimostra appunto che i lati di quadrati commensurabili sono commensurabili se e solo se il rapporto tra questi quadrati è lo stesso che intercorre tra due numeri quadrati.

L'*Epinomide* è dialogo di cui si discute se attribuire la paternità a Platone. Ma Simone Weil (Weil, 104, *Discesa di Dio*, p. 269) lo definisce «opera che appare tutta permeata dall'insegnamento orale di Platone». Al suo interno si affronta di nuovo l'argomento delle radici quadrate dei numeri rettangoli.

In generale si conferma che dopo «la scienza dei numeri in sé», quindi l'aritmetica, «ne viene un'altra che, con nome davvero ridicolo, viene chiamata geometria» – rivolta infatti non alla misura di edifici e terreni, ma alla contemplazione astratta dei propri oggetti. Suo tramite, scrive poi l'autore del dialogo, anche i numeri, che di per sé non sarebbero commensurabili con 1, lo diventano perché tradotti in superfici – i numeri rettangoli, dunque – e si dichiara che «Dio, e non gli uomini, ha prodotto tale meraviglia» (990 d). Una meraviglia che è insieme sbigottimento e ammirazione: ciò che nell'universo pitagorico è sconvolgente e irrappresentabile (*árretos*), cioè l'irrazionale (*álogon*), si materializza attraverso le costruzioni geometriche del *Menone* e del *Teeteto*.

Una breve parentesi, per contrapporre a questo commento ammirato ed entusiasta dell'*Epinomide* il senso di sconforto che Platone invece manifesta, all'interno dell'ultimo suo grande dialogo, *Le Leggi* (819 d-820 c), di fronte all'indifferenza, «degna non di uomini, ma piuttosto di giovani maiali», con cui i cittadini greci accolgono queste teorie, trascurando vergognosamente grandezze commensurabili e incommensurabili.

A queste ultime, e all'elaborazione della teoria che le riguarda, Platone dà il suo contributo, dedicando loro, in particolare, un passo del *Parmenide* (140 b-d). Ma la trattazione classica, compiuta e rifinita, che perfeziona l'approccio platonico e fornisce ulteriore testimonianza della finezza del pensiero geometrico antico, si trova nei libri V e X degli *Elementi* di Euclide. È giusto ricordarla agli studenti, seppure sommariamente.

Cominciamo dal libro V. Convenuto nelle prime due definizioni che «una grandezza minore è parte di una grandezza maggiore se la misura» e che «multiplo è il maggiore del minore se è misurato dal minore», Euclide passa a introdurre il rapporto (*lógos*) di due grandezze omogenee e stabilisce che:

> (la definizione 4) «hanno rapporto tra loro grandezze tali che l'una di esse, moltiplicata, possa superare l'altra»,
>
> (la definizione 5) «le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se gli equimultipli della prima e della terza, rispetto agli equimultipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente o contemporaneamente maggiori, o contemporaneamente uguali, o contemporaneamente minori».

Si dicono poi in proporzione grandezze aventi lo stesso rapporto.

Ora, dalla definizione 4 discende con tutta evidenza che possono avere rapporto grandezze che non sono necessariamente l'una multipla dell'altra, o comunque dotate di un sottomultiplo comune.

All'inizio del libro X, poi, Euclide definisce esplicitamente i concetti di grandezze commensurabili e incommensurabili in termini più o meno analoghi a quelli da noi usati in precedenza. A seguire stabilisce nelle proposizioni dalla 6 alla 8 che grandezze commensurabili tra loro «hanno rapporto come di un numero rispetto a un numero» (ci si riferisce evidentemente a numeri interi positivi e quindi alla possibilità di confrontare le due grandezze in termini di frazioni). Al contrario, le grandezze incommensurabili si caratterizzano proprio dalla caratteristica opposta, di non avere «il rapporto che un numero ha con un numero».

Tanto accade, come ben sappiamo, per lato e diagonale di un quadrato. Attenzione, però: secondo Euclide questi segmenti «hanno rapporto», perché l'uno ammette multiplo che supera l'altro.

Il fatto – e ci ricolleghiamo finalmente all'inizio del capitolo – è che questo rapporto non corrisponde ad alcun numero razionale. Quindi, per tradurlo in termini aritmetici, serve una classe più vasta di numeri: i reali, irrazionali inclusi, quale $\sqrt{2}$ nell'esempio descritto.

Storicamente parlando, una definizione rigorosa di questi nuovi enti numerici – i reali – sopravvenne solo nel 1872, formulata in modo indipendente da vari matematici tedeschi, Georg Cantor, Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weierstrass (1815-1897). Si ebbe quindi oltre due millenni dopo Platone ed Euclide. Eppure il germe dell'idea era già presente nella Grecia classica.

C'è un libro famoso di Godfrey Hardy, che fu un grande matematico del Novecento (1877-1947). Si intitola *Apologia di un matematico* (Hardy, 2002) e costituisce una sorta di affascinante confessione scientifica dell'autore. Offre anche riflessioni profonde sulla matematica antica. Celebra in particolare il pensiero greco e ne indica due pietre miliari, fondamentali nella storia della scienza. Una è proprio il teorema di Pitagora e la conseguente scoperta, sia pure nella forma sopra descritta, dei numeri irrazionali – per la cronaca, l'altra è la prova di Euclide dell'infinità dei primi (la proposizione 20 del libro IX degli *Elementi*). Hardy definisce entrambi questi risultati «"semplici" [...] e tuttavia di primissimo ordine». Aggiunge che ciascuno dei due «conserva la freschezza e l'importanza di quando è stato scoperto».

In definitiva: i numeri reali non furono esplicitamente concepiti dagli antichi greci, se non forse, come abbiamo letto dall'*Epinomide*, come meraviglia donata da Dio – si parlava semmai, all'interno della scuola pitagorica, di *lógoi álogoi*, rapporti incommensurabili, in qualche senso arcani e ineffabili (*àrretoi*). Eppure in Euclide la loro teoria è già chiaramente prefigurata, sia pure nei termini geometrici che abbiamo visto.

Lo confermano, da prospettive diverse, pensatori autorevoli come Imre Toth (1921-2010) (Toth, 2018) e Simone Weil (Weil, 2014).

La seconda arriva esplicitamente a sostenere (Weil, 2014, ancora p. 269) che le righe sopra citate dell'*Epinomide* «definiscono la geometria come la scienza di quel che oggi si chiama numero reale», per la precisione «come la scienza delle radici quadrate irrazionali». Si può discutere pure di quest'ultima affermazione, perché i numeri reali non si fermano alle radici quadrate degli interi positivi, ma includono molto altro, come le radici cubiche, quarte, quinte e via dicendo, o addirittura numeri trascendenti quali π (che non sono radici di nessun grado dei numeri interi, e neppure soluzioni di equazioni non identiche in una indeterminata a coefficienti interi). Ma che la trattazione dell'incommensurabilità nel libro V di Euclide anticipi geometricamente il futuro concetto di numero reale è indubitabile.

Le radici cubiche, appunto. A loro accenna rapidissimamente Teeteto nel "suo" dialogo (148 b). Anch'esse richiamano problemi antichissimi di geometria, per esempio la duplicazione del cubo. In quel caso, infatti, si considera un cubo di spigolo fissato, diciamo di lunghezza 1, e si cerca il lato del cubo di volume doppio. Oggi diremmo che questo lato misura $\sqrt[3]{2}$. La sua irrazionalità si deduce come nella prima dimostrazione per $\sqrt{2}$, salvo sostituire alla ripartizione degli interi positivi tra pari e dispari l'altra tra interi con resto 0, 1, 2 nella divisione per 3.

Nel 1837 il matematico francese Pierre Wantzel (1814-1848) provò l'impossibilità di duplicare il cubo (e cioè costruire un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$) col solo uso di riga e compasso – un risultato che già Gauss aveva annunciato, senza tuttavia lasciare traccia di una dimostrazione. Ma perfino gli antichi greci sapevano come ricavare la costruzione per altra via, ricca nuovamente di intriganti connotazioni geometriche.

Infatti il problema di estrarre la radice cubica di un intero $N > 1$ (nel caso della duplicazione del cubo, di $N = 2$) corrisponde all'inserimento di due medi proporzionali tra N e 1, dunque, aritmeticamente parlando, alla ricerca di x, y per cui:

$$N : y = y : x = x : 1.$$

Si noti che quando $N = a^3$ è il cubo di un intero positivo a, allora i due termini intermedi y, x corrispondono rispettivamente al quadrato di a e ad a stesso, vale infatti $a^3 : a^2 = a^2 : a = a : 1$. Ma in generale, dal confronto tra il primo e l'ultimo membro della duplice proporzione si ricava:

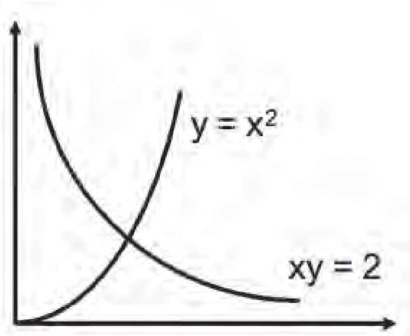
$$N = xy,$$

da quello tra il secondo e il terzo:

$$y = x^2$$

Il sistema delle due equazioni (nelle indeterminate x, y rispetto a N preso come parametro) produce $N = x^3$.

Si osservi come la seconda equazione corrisponda (secondo la moderna geometria analitica) a una parabola, e la prima a un'iperbole equilatera. Allora risolvere il sistema in x e y, in particolare determinare una radice cubica x di N, significa intersecare queste due curve. La figura che segue propone il caso $N = 2$.



Si noti anche come dalla ulteriore proporzione $N : y = y : x$ si ricava $Nx = y^2$, che è equazione di un'altra parabola, e in effetti la precedente intersezione di parabola e iperbole si può anche ottenere come quella delle due parabole $y = x^2$ e appunto $Nx = y^2$.

Ora, tutti questi discorsi si affidano decisamente all'algebra, cioè alla scienza delle equazioni, ed è ben nota la scarsa dimestichezza che con l'algebra ebbero gli antichi greci. Solo con Diofanto, dunque nel terzo secolo d. C., arrivarono ad acquisirne un po'.

Ma la riduzione del problema della duplicazione del cubo, e quindi della ricerca di un duplice medio proporzionale, a quello dell'intersezione di iperbole e parabola e la sua conseguente soluzione furono ottenute anche dai greci con metodi geometrici. Le si attribuiscono infatti a Menecmo, che fu grande matematico del tempo di Platone, allievo di Eudosso e, pare, dello stesso filosofo.

Oggi riesce oggettivamente più semplice procedere con l'approccio algebrico che abbiamo seguito e che era impensabile a quei tempi. Ma l'idea sottostante risale ad allora. Semmai si può aggiungere che, per arrivare al suo obiettivo di tracciare e intersecare iperboli e parabole, Menecmo si affidò anche a qualche marchingegno meccanico, il cui uso non riuscì gradito a Platone – stando alla testimonianza di Plutarco (Plutarco, 2017, *Quaestiones convivales*, 8.2.1). Si ritiene tuttavia che la scoperta stessa delle coniche, dunque di ellissi, iperboli e parabole, sia opera proprio di Menecmo, ispirata per l'appunto dal tentativo di risolvere la duplicazione del cubo. La ricchezza di spunti del pensiero greco classico e l'apporto di Platone sono nuovamente confermati.

Bibliografia

ARISTOTELE (2004). *Metafisica* (a cura di G. Reale). Milano: Bompiani.

ARISTOTELE (2016). *Organon. Categorie – De interpretatione – Analitici primi – Analitici secondi – Topici – Confutazioni sofistiche* (coordinamento generale di M. Migliori). Milano: Bompiani.

BOYER C. (2006). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori.

CANTOR G. (2012). *La formazione della teoria degli insiemi*. Milano: Mimesis.

CAVALLARO M. (2017). *La matematica in Platone*. Roma: Studium.

EUCLIDE (1988). *Gli elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni). Torino: UTET.

FRAJESE A. (1963). *Platone e la matematica del mondo antico*. Roma: Studium.

HARDY G. (2002). *Apologia di un matematico*. Milano: Garzanti.

HEATH T. (1981). *A History of Greek Mathematics. Vol. 1: From Thales to Euclid, Vol. II: From Aristarchus to Diophantus*. New York: Dover Publications.

KLINE M. (1999). *Storia del pensiero matematico*. Torino: Einaudi.

MIGLIORI M. (2013). *Il disordine ordinato. La filosofia dialettica di Platone*. Brescia: Morcelliana.

PETRUCCI F. M. (cur.) (2012). *Teone di Smirne. Exposition rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium. Introduzione, traduzione, commento.* Studies in Ancient Philosophy 11. Sankt Augustin: Academia Verlag.

PLATONE (2000). *Tutti gli scritti* (a cura di G. Reale). Milano: Bompiani.

PLUTARCO (2017). *Tutti i moralia*. Milano: Bompiani.

PROCLO (1978). *Commento al I libro degli «Elementi» di Euclide*. Pisa:

Giardini.

REALE G. (2006). *I presocratici*. Milano: Bompiani.

RUSSO L. (2001). *La rivoluzione dimenticata*. Roma: Feltrinelli.

SZLEZÁK T. (1991). *Come leggere Platone*. Milano: Rusconi.

SZLEZÁK T. (2003). *La Repubblica di Platone. I libri centrali*. Brescia: Morcelliana.

TIMPANARO CARDINI M. (cur.) (2010). *I pitagorici. Testimonianze e frammenti*. Milano: Bompiani.

TOTH I. (2018). *Le sorgenti speculative dell'irrazionale matematico nei dialoghi di Platone*. Pisa: ETS.

WEIL S. (2014). *La rivelazione greca*. Milano: Adelphi.

WHITEHEAD A. N. (1978). *Process and Reality*. New York: Free Press.

ZELLINI P. (1999). *Gnomon, un'indagine sul numero*. Milano: Adelphi.

ZELLINI P. (2018). *La crescita dei numeri nel pensiero antico e moderno. Parole, formule, emozioni. Tra matematica e letteratura* (a cura di Paolo Maroscia, Carlo Toffalori, Francesco Saverio Tortoriello, Giovanni Vincenzi), Novara: UTET - De Agostini, pp. 111-143.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"