Zenone: da Achille ai fotoni e agli iper-computer

Antonio Fontana*, Carlo Toffalori**[1]

DOI:10.30449/AS.v7n13.121

Sunto: *Proponiamo i paradossi di Zenone come argomento di un laboratorio per scuole superiori, discutendone gli aspetti matematici, fisici, informatici, filosofici e letterari.*

Parole Chiave: infinito, infinitesimo, continuità, effetto Zenone, macchina di Zenone.

Abstract: *We propose Zeno's paradoxes as the topic of a laboratory for high schools, and we discuss their mathematical, physical, IT, philosophical and literary aspects.*

Keyword: infinite, infinitesimal, continuity, Zeno effect, Zeno machine.

Citazione: Fontana A., Toffalori C., *Zenone: da Achille ai fotoni e agli ipercomputer*, «ArteScienza», Anno VII, N.13, pp.173-222, DOI:10.30449/AS.v7n13.121.

1 - Introduzione

Zenone di Elea, filosofo, visse nel quinto secolo avanti Cristo. Il suo maestro Parmenide teorizzò che la realtà fosse increata e in-

* Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; antonio.fontana@unicam.it .
**Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie; carlo.toffalori@unicam.it .

[1] Ringraziamo la dr.ssa Paola Di Buò, che ha inserito ed elaborato molti degli argomenti di questa nota nella sua tesi di laurea magistrale all'Università di Camerino. Siamo anche grati a Stefano Leonesi per vari suggerimenti.

distruttibile, immutabile e indivisibile, quindi anche immobile. Espose le sue convinzioni in un poema *Sulla natura*, suddiviso in due parti, sulla verità e sull'opinione. Specie della prima ci restano frammenti significativi (Parmenide, 2001). Zenone compose i suoi quattro famosissimi paradossi (rispettivamente la dicotomia, Achille e la tartaruga, la freccia e lo stadio) a sostegno di queste tesi, contestando dunque anche la semplice possibilità di un movimento.

L'analisi dei suoi ragionamenti sembra un tema promettente per un laboratorio di matematica nelle Scuole Superiori, in particolare nei Licei Classico e Scientifico, anche perché soddisfa quella caratteristica di interdisciplinarità che oggi giustamente si auspica: collega infatti la matematica non solo alla filosofia, ma pure a letteratura (italiana e internazionale), fisica, informatica eccetera.

Si può semmai obiettare che la riflessione sui paradossi è un gioco troppo intellettuale e astratto, inadatto ai ragazzi di oggi, fine a se stesso, lontano da quella didattica della matematica che oggi spesso si propugna, sviluppata non solo col rigore della mente, ma soprattutto con l'intuizione, con gli occhi e con le mani. D'altra parte la logica di Zenone è irriverente, provocatoria, quasi sfrontata.[2] Per di più, sembra resistere a tentativi millenari di soluzione, probabilmente perché più sottile degli argomenti che vorrebbero spiegarla. Quegli antichi ragionamenti restano quindi attuali e affascinanti a dispetto del loro carattere teorico.

In questa prospettiva di laboratorio ideale rivolto a studenti degli ultimi anni delle scuole superiori (ma non solo a loro) vogliamo qui accostarli.[3] Così, dopo aver presentato nel capitolo 2 Zenone e i suoi argomenti, ne forniremo possibili spiegazioni matematiche, sia attraverso la teoria delle serie numeriche, sia me-

[2] Anche Claudio Bartocci, nell'*Introduzione* ai *Racconti matematici* (Bartocci, 2007), ne rileva «l'insolenza», che «spregia il senso comune».

[3] L'ultimo autore ha già trattato l'argomento alcuni anni fa in (Toffalori, 2011). Ma qui si aggiungono altri riferimenti e, soprattutto, ci si muove nella prospettiva didattica appena descritta. Sui paradossi di Zenone ci piace anche citare l'analisi lucida e profonda di Luca Nicotra in (Nicotra, 2017).

diante le definizioni dei concetti di infinito, infinitesimo e continuità. A questo obiettivo saranno dedicati rispettivamente i capitoli 3 e 4. Osserveremo tuttavia che, a dispetto di questi sforzi di chiarificazione, i problemi di Zenone mantengono la vivezza e l'attualità che già si dicevano. Menzioneremo così nel capitolo 5 varie opere letterarie, anche recenti e famose, che ne vengono ispirate. Ma noteremo che pure in fisica, in matematica e in informatica gli argomenti di Zenone rimangono la fonte o il termine appropriato di paragone di sviluppi modernissimi. In fisica quantistica, con i così detti effetti Zenone e anti-Zenone (l'oggetto del capitolo 6); in matematica, con il primo teorema di incompletezza di Gödel (trattato nel capitolo 8); in informatica, con la macchina ipercomputazionale di Zenone (il tema del capitolo 9). Ulteriori applicazioni e interpretazioni matematiche, frutti divertenti della fantasia di Lewis Carroll, saranno proposte nel capitolo 7, mentre nel capitolo finale 10 cercheremo di trarre qualche conclusione.

Ci rivolgiamo principalmente ai docenti e, loro tramite, agli studenti delle superiori, ma più in generale a tutti coloro che, anche al di fuori della scuola o a livello solo amatoriale, in qualche modo si appassionano agli antichi dilemmi zenoniani.

2 - Zenone di Elea

Conviene anzitutto presentare il massimo protagonista di questa nota, cioè Zenone. Meglio farlo attingendo alle fonti storiche dell'antichità. Platone ce lo descrive insieme al suo maestro Parmenide nel modo che segue, all'inizio del dialogo che a *Parmenide* è appunto intitolato (Platone, 1998).

> Parmenide era già molto vecchio e assai canuto, ma bello e nobile d'aspetto, sui sessantacinque anni. Zenone invece era allora vicino ai quaranta, di notevole statura e gradevole a vedersi…

Platone scende poi per un attimo a livello di chiacchiericcio, asserendo che i due erano, o erano stati, più che amici. Quanto al seguito del dialogo, Zenone vi interviene lungamente per discutere con un giovane Socrate e illustrargli le teorie del proprio maestro.[4] Platone però non si sofferma esplicitamente sui paradossi, che si trovano invece riferiti anzitutto da Aristotele nella *Fisica* (Aristotele, 2008) e poi da suoi seguaci e commentatori come Diogene Laerzio (Diogene Laerzio, 2008-10) e Simplicio (Simplicio, 1989), (Simplicio, 1995).[5] Questi ultimi aggiungono talora – almeno il primo – particolari forse romanzati sulla vita del filosofo di Elea.

Apprendiamo tuttavia già da Platone di un libro in cui Zenone avrebbe raccolto una quarantina dei suoi argomenti a favore di Parmenide. Di questa opera Simplicio, che ne scrisse a distanza di un millennio, era probabilmente ancora in possesso, ma oggi non si conserva quasi più traccia. I pochi frammenti originali che di Zenone ci sono restati sono raccolti in (Untersteiner & Reale, 2011). Ci rimane tuttavia il testo, riportato dalle fonti sopra elencate, di 9 paradossi, tra cui i 4 più celebri contro il movimento. Gli altri 5, meno famosi, criticano la molteplicità e la pluralità del reale, appunto a supporto delle convinzioni moniste di Parmenide. Uno tra loro, per esempio, sostiene che, se gli enti si possono dividere in due, e poi di conseguenza in quattro, e così via fino all'infinito, allora non possono avere grandezza, e quindi neppure esistono. Se aggiungere e togliere non cambia, allora vuol dire che non si aggiunge e non si toglie nulla. In questo consisterebbe il così detto paradosso della *grandezza finita* (Simplicio 1995, 139.9 e 141.2-8).

[4] Ricordiamo che Platone visse all'incirca dal 428 al 348 a. C. e Socrate da più o meno il 470 al 399 a. C..

[5] Aristotele visse probabilmente dal 384 al 322, sempre a. C.. Diogene Laerzio gli succedette di qualche secolo, la sua esistenza si può collocare tra il 180 e il 240 d. C.. Simplicio di Cilicia operò molto più tardi, durante il VI secolo d. C.; nacque intorno al 490 d. C. e morì verso il 560; fu neoplatonista bizantino, attento commentatore di Aristotele. I passi su Zenone che di lui citeremo si trovano appunto nel suo ampio trattato *Sulla Fisica di Aristotele* di cui non si trovano con facilità edizioni complete né italiane né inglesi. Trarremo allora gli spunti che ci riguardano, come già indicato, da (Simplicio 1989), (Simplicio 1995).

Un altro ragionamento famoso è quello *del granello di miglio*, che se cade per terra da solo non produce rumore, a differenza di quello succede se casca in un mucchio: dal che viene legittimo domandarsi come può una moltitudine di silenzi generare un suono (Aristotele, 2008, *Fisica*, 250a19).

Ma passiamo ai quattro *paradossi* contro il movimento, così come ce li riferisce ancora Aristotele nella *Fisica*, VI 9, 239b (Aristotele, 2008) – conviene affidarsi nuovamente alle fonti più vicine a Zenone. A onore del vero una sintesi magistrale del suo pensiero è operata da Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) – un altro autorevole pensatore che i ragazzi incontrano studiando – nelle sue *Lezioni sulla storia della filosofia* (Hegel, 1967): il puro essere non è movimento, ma piuttosto la negazione del movimento.

Seguiamo comunque l'esposizione aristotelica, quasi altrettanto sobria e concisa.

Il paradosso della dicotomia o del mobile: «Quattro sono gli argomenti di Zenone intorno al movimento che offrono difficoltà di soluzione. Primo, quello sulla inesistenza del movimento per la ragione che il mosso deve giungere prima alla metà che non al termine». Detto per esteso: un corridore che dal punto di partenza vuol raggiungere un traguardo deve prima arrivare a metà strada, o prima ancora a metà della metà, a metà della metà della metà, e così via. In definitiva neppure si muove. Una versione differente, che si può ugualmente dedurre dalle parole di Aristotele, presuppone in qualche senso la prospettiva opposta e rileva come il corridore, muovendo verso la meta, debba arrivare a mezza strada, e poi a metà della metà rimanente (i 3/4 del totale), a seguire ai 7/8, così che, in conclusione, non giunge mai alla fine.

Il paradosso di Achille (e della tartaruga): «Il secondo argomento di Zenone è quello chiamato di Achille. Ragiona che il più lento non sarà raggiunto dal più veloce perché l'inseguitore deve passare per il luogo che l'inseguito ha appena abbandonato, di modo che il più lento ha sempre un certo vantaggio». Si noti che Aristotele parla di Achille ma non della tartaruga. Al proposito, si potrebbe introdurre agli studenti il grande scrittore argentino Jorge Luis Borges (1899-1986) e riferire il desiderio da lui manifestato in *Metempsicosi della tartaruga* (Borges, 1984, pp. 395-399) – uno dei saggi che compongono *Discussione* [Bo1] – , e cioè di conoscere «il nome del poeta che lo dotò [l'argomento] di un eroe e di una tartaruga». Per la cronaca, l'animale sembra comparire nella versione del paradosso fornita da Simplicio (Simplicio, 1989, 1014.10), scritta però molti secoli dopo Aristotele.

Il paradosso della freccia: «Il terzo è […] che la freccia, nell'atto in cui è spostata, sta ferma. Ma questa conclusione si ottiene solo se si considera il tempo come composto da istanti». Quindi, istante per istante una freccia scoccata è immobile. Ma come può la somma di infinite immobilità generare un movimento? Si noti che la successiva versione di Diogene Laerzio (Diogene Laerzio, 2008-10, libro IX, 72), meno articolata di quella aristotelica, evita ogni riferimento al tempo, concentrandosi sullo spazio e limitandosi a riferire che Zenone nega il movimento perché «ciò che si muove non si muove né nel luogo dov'è, né in quello in cui non è», nel primo perché già lo abita, nel secondo perché ne sta al di fuori.

Il paradosso dello stadio: «Il quarto è quello delle masse uguali che si muovono nello stadio in senso contrario a quello di altre masse uguali, le une dalla fine dello stadio, le altre dal mezzo, con uguale velocità. E con questo ragionamento [Zenone] crede nel risultato che la metà del tempo sia uguale al suo doppio.» In verità il testo di Aristotele appare qui abbastanza criptico. Un'interpretazione in termini moderni è quella di due treni che si incrociano muovendo in direzioni opposte: a un osservatore che segue la scena da terra, il tempo in cui un treno gli sfreccia davanti sembra maggiore di chi invece si trova al finestrino del treno concorrente. Ancora Borges sottolinea, sempre in *Discussione*, come i paradossi zenoniani evochino il tema fascinoso e insidioso dell'infinito. Citiamo due suoi passi famosi:

- il primo, de *La perpetua corsa di Achille e della tartaruga* (Borges, 1984, pp. 379-385) descrive l'infinito come «parola (e poi concetto) di spavento che abbiamo generato temerariamente e che una volta ammessa in un pensiero esplode e lo uccide»;

- il secondo, tratto da *Metempsicosi della tartaruga* (Borges, 1984, 395-399) accenna a «un concetto che corrompe e fa ammattire gli altri», e chiarisce trattarsi non del Male «il cui limitato impero è l'etica», ma de «l'infinito».

Più ampio e sottile è, a questo proposito, il commento di Bertrand Russell (1872-1970), autorevole logico, matematico e filosofo del secolo scorso, nonché Premio Nobel 1950 per la letteratura. Ne *La matematica e i metafisici* (Russell, 1970, pp. 71-92), uno dei saggi di *Misticismo e logica*, rileva come Zenone affronti «3 problemi più astratti del moto»: non solo l'*infinito*, ma anche, nell'ordine, gli *infinitesimi* e la *continuità* (Russell, 1970, p. 77). Concetti delicati e ostici da accostare, soprattutto il terzo. Avremo modo di tornarci.

I tentativi di spiegazione dei quattro paradossi, operati sin dall'antichità, sono molteplici. Aristotele per esempio «confuta Zenone con brevità quasi sdegnosa» – parole ancora di Borges. Introduce tuttavia il tema della continuità, e implicitamente pure quello degli infinitesimi. Sappiamo bene, infatti, di come l'antico filosofo distinguesse tra infinito potenziale e attuale. Per intendersi: un segmento si può allungare indefinitamente senza però mai allargarsi a una retta infinita; può accrescersi in potenza ma gli è vietato raggiungere la dimensione di un infinito effettivo e concreto. Secondo Aristotele, allora, tempo e spazio fluiscono e scorrono alla maniera dei punti adimensionali di un segmento – con continuità, appunto – e non si frazionano schematicamente come Zenone vorrebbe. O, meglio, possono anche farlo quante volte si vuole, ma non arrivare a una ripartizione infinita in porzioni di lunghezza finita.

Quanto al paradosso della freccia, ferma in ogni istante e quindi per sempre, Aristotele ritiene che possa definirsi «in quiete ciò che […] si trova ora allo stesso modo che prima». Ma «nell'istante» – prosegue – «non c'è il prima, e quindi neppure la quiete». «Solo nel tempo», conclude, «il mosso si muove e il quieto riposa». Altri argomenti contrari a Zenone appaiono più bruschi e sbrigativi, seppure incisivi. È il caso di quello di Diogene il Cinico, il filosofo che visse nel quarto secolo dopo Cristo, al tempo di Alessandro Magno.[6] Gli studenti lo ricorderanno anche per le sue presunte stravaganze: la botte in cui si narra che vivesse, o la lanterna con cui si aggirava cercando «l'uomo». La sua contestazione a Zenone viene riferita sia dal suo omonimo Diogene Laerzio (Diogene Laerzio, 2008-10, libro VI, 39) che da Simplicio (Simplicio, 1995, 1012.22), e poi ricordata in tempi più recenti da altri due filosofi che si incontrano nelle superiori: Kierkegaard – all'inizio di (Kierkegaard, 2008) – e Georg Hegel (Hegel, 1967), nelle pagine dedicate a Zenone. Ecco per completezza la versione di Søren Kierkegaard (1813-1855):

> Visto che gli Eleati negavano il movimento, intervenne Diogene nel suo ruolo di oppositore […] Non disse una parola, ma camminò semplicemente avanti e indietro due o tre volte, col che stimò di averli confutati a sufficienza.

Hegel invece racconta: «È noto come Diogene di Sinope, il Cinico, confutò con estrema facilità questi argomenti contro il movimento: senza parlare si alzò e camminò su e giù, contestandoli con l'azione». Aggiunge però il filosofo tedesco che «dove si disputa a suon di ragioni, la sola confutazione valida è ragionata; uno cioè non deve accontentarsi della certezza sensibile, ma deve anche capire». Auspica dunque critiche più argomentate.

3 - Invenzioni del diavolo

Il più popolare dei paradossi è certamente il secondo. A riferircelo nuovamente chiamiamo uno scrittore famoso come Borges. Ecco come lo ripropone, ancora ne *La perpetua corsa di Achille e della*

[6] Probabilmente dal 412 al 323.

tartaruga (Borges, 1984, pp. 379-385) in termini assai meno laconici di Aristotele.

> Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro, e così all'infinito; di modo che Achille non può correre per sempre senza raggiungerla.

Analogo è il racconto di un altro grande della letteratura, Lev Tolstoj (1828-1910), in *Guerra e pace* (Tolstoj, 2015, pp. 1279-80): «È noto il così detto sofisma degli antichi consistente in questo, che Achille non raggiungerà mai la tartaruga, la quale cammina davanti a lui, nonostante che Achille vada 10 volte più in fretta della tartaruga» ecc. L'autore russo aggiunge però qualche interessante considerazione finale sul tema della continuità. La citiamo, rinnovando la promessa di approfondire più tardi il discorso:

> L'assurdità della situazione scaturiva dal fatto che si ammettevano arbitrariamente delle unità discontinue di moto, mentre il movimento sia di Achille sia della tartaruga avveniva senza interruzione.

Ma torniamo a Borges e alla spiegazione matematica che egli finalmente fornisce del paradosso nel suo saggio.

> Basta fissare la velocità di Achille a un metro al secondo, per stabilire il tempo di cui ha bisogno: 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000 + …
>
> Il limite della somma di questa progressione geometrica è dodici, ma non viene mai raggiunto. Cioè, il tragitto dell'eroe sarà infinito e questi correrà per sempre, ma il suo percorso si esaurirà prima di dodici metri, e la sua eternità non vedrà il termine di dodici secondi. Questa dissoluzione metodica, questa illimitata cadu-

ta in precipizi sempre più minuscoli, non è in realtà ostile al problema: è immaginarselo bene.

A onore del vero pare proprio che Borges prenda un abbaglio, quando parla di una somma uguale a 12. Come vedremo, il risultato è diverso e 12 lo approssima solo per eccesso. Ma, al di là di questi dettagli, stupisce anche la sola eventualità di una somma finita, 12 o meno di 12, per un'addizione di infiniti termini tutti positivi. Meraviglia ancora più, a ben pensarci – e merita che se ne discuta coi ragazzi – l'idea stessa di una somma infinita, di cui pur tuttavia si può fissare il culmine, che non è l'infinito nella sua vaghezza ma è talora finito e, quand'anche infinito, si lascia determinare e conformare. Un argomento apparentemente semplice per spiegare l'arcano, almeno nel caso di Achille e della tartaruga, è il seguente. Attenzione, però, conviene ripeterlo: ci muoviamo in terreno sottile e insidioso, da affrontare con la dovuta cautela e semmai ricontrollare a posteriori. Facciamo a ogni modo riferimento al contesto già descritto da Borges e Tolstoj.

- Chiamiamo S lo spazio percorso dalla tartaruga, che quindi complessivamente corrisponde a 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + … cioè a
$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\ \dots$$
(l'addizione degli inversi delle infinite potenze di 10).
- Quello S' di Achille è allora 10 + S = 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + … cioè:
$$10+\ 1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\ \dots .$$

Ci troviamo così di fronte a due somme di infiniti addendi, delle quali però la seconda pare ottenersi dalla prima moltiplicando per 10:
$$S' = 10\ S.$$

Sottraendo perciò l'una dall'altra si ricava

$$9S = 10\,S - S = S' - S = 10$$

da cui

$$S = \frac{10}{9}, \qquad S' = S + 10 = \frac{10}{9} + 10 = \frac{100}{9}.$$

Premesso che il risultato 100/9 così ottenuto è, come preannunciato, solo minore di 12 e non uguale, prendiamo atto che l'infinito frazionamento immaginato da Zenone ha pur tuttavia prodotto una somma finita. Così, verrebbe da dire, quando la tartaruga ha percorso 10/9 di un metro, Achille la raggiunge. Anzi, il ricongiungimento avviene dopo un tempo di 10/9 di secondo se assumiamo che Achille corra alla velocità costante di 1 metro al secondo, e la tartaruga proceda 1 decimetro al secondo.

In verità viene da pensare che l'uguaglianza $S' = 10\,S$ sussiste anche quando l'una e l'altra distanza, S' e S, sono infinite. Sembra infatti ragionevole convenire che l'infinito, in quanto infinito, è 10 volte se stesso. Perché allora possiamo aspettarci S finito? Per convincerne gli studenti, si potrà mostrare come ogni somma parziale

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^n}$$

(con n numero naturale) è sempre minore di 10/9 (e quindi anche di 12): affermazione che si può controllare con qualche esempio, oppure cercare di provare per esteso in astratto, come esercizio per introdurre il principio di induzione.

Sembra poi lecito trasferire il precedente ragionamento da 1/10 a qualunque altro valore q con $0 < q < 1$, per esempio a $q = 1/2$, e anzi, si potrebbe pensare, a ogni $q \neq 0$, perfino esterno all'intervallo]0, 1[. A ogni modo nell'ambito di Zenone, se per q si intende il rapporto delle due velocità della tartaruga e di Achille, viene facile accettare $0 < q < 1$. Infatti:

- $q > 0$ significa che la tartaruga si muove (semmai $q = 0$ corrisponde al caso di una tartaruga ferma e quindi al primo paradosso di Zenone, quando Achille ha da raggiungere un traguardo fissato),
- $q < 1$ equivale ad assumere che Achille è più veloce.

Inoltre per $0 < q < 1$ le varie potenze q^n decrescono e diventano sempre più piccole, avvicinandosi a 0.

Si apre così una parentesi presumibilmente affascinante per il nostro laboratorio, riguardante appunto il calcolo di queste somme infinite, del quale non sembra imprudente proporre ai ragazzi alcuni casi particolari, riguardanti tutti o quasi il caso appena trattato in cui gli addendi sono le potenze di un unico valore q, la così detta *serie geometrica* di ragione q. Ci permettiamo qui un rapido excursus di esempi ben noti, inaugurandolo con un necessario tributo ad Archimede (287-212 a. C.), cui già si attribuisce la coscienza che una serie di questo genere possa avere somma finita, appunto per $0 < q < 1$.

- Converrà tuttavia cominciare col caso $q = 1$, per il quale sembra facile concludere che la somma 1+1+1+…+1+… ha valore infinito, perché le somme parziali $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$ crescono oltre ogni limite. Idem se 1 è sostituito da un qualsiasi valore positivo, come 1/2 o 1/4.

- Ne consegue che, per $q \geq 1$, pure la somma $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$ ha valore infinito: infatti per le sue somme parziali si ha $1 + q + q^2 + \cdots + q^n \geq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$ (per $q \geq 1$ le potenze q^n crescono con n e sono tutte ≥ 1).

- Eppure per q = 2 un argomento analogo a quello usato prima per 1/10 ci condurrebbe a una conclusione ben diversa, e del tutto inverosimile. Poniamo infatti $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n + \cdots$. Moltiplicando ambo i membri per 2, otteniamo

$$2\,S = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = S - 1,$$

  dunque $S = -1$ .Ma come può una somma di addendi positivi risultare negativa? Il risultato è talmente incredibile da generare qualche serio dubbio pure sulla precedente conclusione per 1/10 e da ribadire l'esigenza di procedere in modo prudente e avveduto.[7]

- Si potrebbe poi passare a $q= -1$, dunque a $1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n + \cdots = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, le cui somme parziali valgono alternativamente 1 (per n pari) e 0 (per n dispari). Quale può essere la somma totale? E ha senso aspettarsene una, univoca e precisa? All'inizio del Settecento Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e prima di lui Guido Grandi (1671-1742) azzardarono come risposta il valor medio 1/2, ma su basi, diremmo oggi, probabilistiche. Un trucco più disinvolto per confermare questa soluzione, riferito dal grande matematico inglese Godfrey Hardy (1877-1947) nell'introduzione di (Hardy, 1973, pagina 6), consiste in questo: chiamata S, come in precedenza, la somma, si prende atto che $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 + \ldots = 1 - S$ e si deduce $2S = 1$, quindi $S = 1/2$. Così facendo, però, si presuppone che la somma S esista…

[7] Niels Abel, che fu geniale matematico norvegese di inizio Ottocento, scomparso purtroppo prematuramente (1802-1829), scrisse in una lettera del gennaio 1826 al collega e sostenitore Bernt Holmboë che le serie divergenti all'infinito, come quella appena considerata, sono «un'invenzione diabolica, ed è una vergogna basarci una qualsiasi dimostrazione» – un monito alla cautela, che si applica evidentemente anche al nostro esempio.

- A proposito di serie a segni alterni, come la precedente (che chiameremo "di Grandi"), è ancora più stupefacente il caso (Gardner, 1972, p. 170) che si genera dalla somma già considerata (ed evidentemente infinita) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n + \cdots$ avvicendando tra i vari addendi il + e il –, in modo da ricavare $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 \ldots + (-1)^n 2^n + \cdots$. Quest'ultima somma si può scrivere
  - sia come $1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) \ldots = 1 + 2 + 8 + 32 + \cdots$ che chiaramente diventa $+\infty$,
  - sia come $(1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + \cdots = -1 - 4 - 16 - 64 - \cdots$ che invece tende a $-\infty$.

Fu solo nell'Ottocento, con Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e poi soprattutto con Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897), che la teoria delle serie numeriche prese una sua forma e consistenza. La somma di infiniti addendi viene allora intesa come il limite, se esiste, finito o infinito, della successione delle somme parziali. Di conseguenza, nel caso della serie geometrica, i precedenti risultati si possono confermare e chiarire nel modo che segue, e che crediamo accessibile agli studenti ancora digiuni della teoria dei limiti. Si parte dall'eguaglianza, valida per ogni q e per ogni n e facile da verificare:

$$(1 - q) \times (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) =$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} =$$

$$= 1 - q^{n-1}$$

per cui la somma parziale n-ma per $q \neq 1$ assume l'espressione:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ora, per $|q| < 1$ (eventualmente per q negativo), al crescere di n la potenza q^{n+1} tende a 0 e quindi la serie converge al valore finito $1/(1 - q)$, vale cioè

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q},$$

a conferma del risultato ottenuto per $q = 1/10$ dal confronto di S e S'.
Si ribadisce poi che, per $q \geq 1$, la serie "diverge" e ha somma $+\infty$. Secondo la teoria di Cauchy, invece, per $q \leq -1$ la serie non ha limite e la somma resta indefinita.
A ogni modo, nei casi dei primi due paradossi di Zenone, per $q = 1/10$ oppure $q = 1/2$, si ottiene rispettivamente:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

e

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

In particolare, nell'argomento della dicotomia, la somma delle lunghezze delle varie tappe che il corridore ha da percorrere, cioè della metà del tragitto, poi della metà della metà restante, e così via, è:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) - 1,$$

e vale in definitiva $2 - 1 = 1$: come dire che il cammino è completato per intero.

A rigore, però, se interpretiamo il resoconto aristotelico nell'altro senso possibile, e cioè pensiamo che il corridore, per arrivare al traguardo, deve giungere a metà strada, e prima ancora a metà della metà, e poi a metà della metà della metà ecc., ecco allora che non la distanza percorsa, ma quella da percorrere cresce progressivamente fino a 1. Siamo quindi portati a concludere che il corridore neppure si muove: sta fermo perché sta fermo, che è un po' quello che sostiene Zenone.

Sempre a proposito del paradosso della dicotomia e quindi della serie geometrica di ragione 1/2, ecco tre intriganti variazioni sul tema.

La prima ci è raccontata nuovamente da Borges ne *L'eterna corsa di Achille e della tartaruga* (Borges, 1984, pp. 379-385). Riferisce della «leggenda cinese dello scettro dei re di Liang, che diminuiva di una metà ad ogni nuovo re» e che, «mutilato da dinastie, esiste ancora». Evidenzia come i singoli addendi $1/2^n$, pur rimpicciolendosi oltre ogni limite, non si annullano mai.

A questo proposito circola in rete l'aneddoto sugli errori che un laureando assomma nella sua tesi, inevitabili almeno nella prima stesura. Supponiamo allora che in partenza essi siano in numero di $n > 0$ e che a ogni nuova versione, grazie ai consigli del relatore e a qualche sforzo dello studente, si riducano della metà. La conclusione è che il ragazzo non si laureerà mai. Gli errori, pur diminuendo, non scompariranno mai. In verità, il ragionamento ci pare meno convincente, anzitutto perché il numero degli sbagli è comunque un intero, e non può dimezzarsi indefinitamente rimanendo in $\mathbb{Z}$, ma soprattutto perché, come l'esperienza insegna, il professore prima o poi si stanca e chiude un occhio se non due perfino davanti al laureando più pigro e refrattario.

Molto più centrato e divertente è l'esempio riferito da Martin Gardner nel capitolo di (Gardner, 1972) dedicato proprio ai limiti delle serie infinite (pp. 163-172): un testo a nostro avviso irrinunciabile per chi vuole accostare in modo leggero ma serio l'argomento. Vi si immagina una palla che cadendo dall'alto rimbalza e arriva ogni volta alla metà dell'altezza raggiunta in precedenza. Stando a Zenone, la palla non si arresta mai. L'esperienza manifesta il contrario – conclusione che però è verosimilmente influenzata dall'elasticità della palla e da eventuali attriti dell'aria.

Tuttavia, esclusi per semplicità questi fenomeni e supposto che la palla scenda inizialmente dall'altezza 1, si ha che lo spazio che essa percorre con i suoi salti, il primo solo verso il basso, gli altri su e giù, è la somma appunto di 1 e poi di:

- $1/2 + 1/2 = 1$ (nel primo rimbalzo),
- $1/4 + 1/4 = 1/2$ (nel secondo),
- $1/8 + 1/8 = 1/4$ (nel terzo)

e così via, quindi complessivamente:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

cioè, come già sappiamo, 3 – dunque finita, con tutte le conseguenze che se ne possono trarre.

Un'ultima considerazione, sempre a riguardo della serie geometrica di ragione $q = 1/2$ o comunque positiva e minore di 1. Come appena sottolineato dai casi dei re di Liang e del laureando, la successione degli addendi:

(i) è decrescente,
(ii) converge a 0,
(iii) ha termini tutti positivi.

Nel laboratorio varrà tuttavia la pena di evidenziare come non sempre una successione di addendi con tali caratteristiche produce una serie convergente a somma finita. In proposito si potrà proporre il caso della così detta *serie armonica:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

(con n intero positivo), i cui addendi $\frac{1}{n}$ corrispondono alla precedente descrizione. Tuttavia, secondo l'ingegnoso ragionamento attribuito al vescovo e matematico Nicola d'Oresme (1323-1382),

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots>$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{8}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\quad\frac{2}{4}\quad+\qquad\frac{4}{8}\qquad+\qquad\frac{8}{16}\qquad+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\quad\frac{1}{2}\quad+\qquad\frac{1}{2}\qquad+\qquad\frac{1}{2}\qquad+\cdots\ ,$$

una somma di infiniti addendi positivi uguali tra loro, che già sappiamo divergere. È tuttavia notevole che, ove applichiamo a questa serie armonica il gioco di Guido Grandi, alternando i segni tra positivo e negativo, si ottiene

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\dots,$$

che stavolta ha una somma finita e cioè il logaritmo naturale di 2, *ln* 2 – comunque un numero irrazionale, cioè inesprimibile come frazione di interi. Un risultato più complicato da ottenere, che converrà citare ai ragazzi senza scendere in dettagli. Servirà comunque a suggerire come le somme infinite di addendi razionali generino numeri che razionali non sono, e anzi numeri famosi della matematica: non tanto *ln* 2, quando soprattutto π. Consideriamo infatti il caso della serie che da quella armonica si deduce considerando solo gli addendi con denominatore dispari, quindi

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots.$$

Adattandole il trucco di Oresme, stavolta in riferimento a $1/4$ invece che a $1/2$, i ragazzi potranno provare che la sua somma è infinita. Ma se si passa alla sua versione a segni alterni, ecco che si scopre che essa ha somma finita, e addirittura

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}\ .$$

Sempre a riguardo della serie armonica, Gardner (Gardner, 1972, pp. 167-170) sottolinea quanto lentamente essa si avvicini all'infinito, impiegando addirittura più di 2^{143} addendi per superare quota 100, e ne propone incredibili conseguenze, come la costruzione di un ponte di carte da gioco sospeso (o quasi) sul vuoto: un esperimento che si potrebbe, perché no?, provare a ripetere in classe.

In definitiva la teoria delle somme infinite, ispirata dall'analisi degli argomenti zenoniani, si rivela una sorgente traboccante di sorprese – perfino tra le serie divergenti, che sono sì insidiose, ma non per questo «invenzioni diaboliche»: al contrario capaci di stimolare, anche da un caso in apparenza insignificante quale 1 + 1 + 1 + …, mutazioni intriganti come la somma a segni alterni $1+(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n+\cdots$ di Guido Grandi. Il libro che Godfrey Hardy dedicò all'argomento (Hardy 1973) ne testimonia con le sue oltre quattrocento pagine la ricchezza e la varietà. Sottolinea poi come a fondare e disciplinare le serie provvedano non solo il sistema di Cauchy, ma altre teorie concorrenti. Se dunque per Cauchy la serie di Grandi, rimbalzando indefinitamente tra 0 e 1, finisce per non aver limite, altri matematici, muovendo da opportune motivazioni, le assegnano la somma che già conosciamo, cioè $1/2$. Osservazione che, a prescindere dal tema specifico delle serie, può insinuare nei ragazzi la convinzione che la matematica, e più in generale la scienza, non sia un edificio monolitico da imparare a scatola chiusa, ma uno spazio dinamico, aperto a concezioni anche diverse e quindi a discussioni.

4 - Storie di alberghi e di infinito

Ritorniamo al racconto tolstojano del paradosso di Achille e della tartaruga e al suo accenno alla continuità. Analogo richiamo abbiamo sentito da Bertrand Russell ne *La matematica e i metafisici*: in verità gran parte di quel saggio, come pure dell'altro *Lo studio della matematica*, sempre contenuto in (Russell, 1970, pp. 56-70), è dedicato a Zenone e ai suoi quattro ragionamenti sul moto. Russell ne presenta anche una variante spiritosa, che chiama *paradosso di TristramShandy*. La ricava infatti dal famoso romanzo di Laurence Sterne (1713-1768), *Vita e opinioni di Tristram Shandy, gentiluomo* (Sterne, 1990), dove il protagonista, biografo di se stesso, al capitolo tredicesimo del libro quarto (a pagina 263), s'accorge d'aver impiegato dodici mesi per raccontare il suo giorno natale, così che nel frattempo altri 364 se ne sono aggiunti da narrare, e paventa che, proseguendo a quel ritmo, non riuscirà a riferire che una minima parte della sua storia. Invece dell'inseguimento nello spazio di Achille alla tartaruga, assistiamo allora a quello nel tempo di Shandy narratore a Shandy personaggio. Ma stavolta gli intervalli di separazione anziché restringersi si dilatano, così che il protagonista dispera di non poter mai raggiungere se stesso.

Nel suo saggio, in verità, Russell afferma che Shandy impiega due anni per raccontare i primi due giorni di vita. Osserva tuttavia che, se Shandy fosse stato eterno «nessuna parte della biografia sarebbe rimasta non scritta. Infatti: nel centesimo anno avrebbe descritto il centesimo giorno, nel millesimo anno il millesimo giorno, e così via». Desume che allo stesso modo «la tartaruga, se le concedete del tempo, andrà altrettanto lontano di Achille».

Il libro di Sterne è forse lettura impegnativa per gli studenti delle superiori, i quali tuttavia potrebbero gradirne questo e altri passi surreali.

Quanto a Russell e alla sua spiegazione dei paradossi di Zenone, essa si basa sulla premessa che tempo e spazio non sono la successione discreta di intervalli disgiunti, ma fluiscono con continuità, così come riteneva Aristotele. Un segmento, per piccolo che sia, non è tuttavia un punto. A misurare i segmenti e i secondi possono provvedere i numeri naturali e i loro conteggi. Ma per studiare i punti ci vuole l'analisi reale con i suoi strumenti, dunque il calcolo differenziale. Spazio e tempo sono continui di punti o istanti, non sequenze discrete e frammentate.

Russell celebra allora il ruolo di Karl Weierstrass (con Dedekind e Cantor[8]) nella introduzione rigorosa dei numeri reali e nel conseguente chiarimento del concetto di continuità. A Weierstrass si deve lo sviluppo tra i reali, grazie agli epsilon e ai delta della definizione di limite, di un approccio rigoroso e convincente al calcolo infinitesimale – lo stesso che ancora oggi viene insegnato e, pur suscitando di rado l'entusiasmo di chi lo impara, provvede ottimamente al suo intento. La stessa somma di una serie infatti si propone come il limite delle approssimazioni parziali – dunque l'analisi fornisce il necessario fondamento anche alle spiegazioni del capitolo precedente.

L'assioma della continuità, concepito da Dedekind e Cantor, accredita i numeri reali come le ascisse adeguate per i punti di un segmento o per gli istanti di un intervallo temporale. Argomenti che troviamo esposti per esteso e in modo magistrale proprio da Bertrand Russell anche in altre sue opere,[9] ma che sono certamente troppo complicati per gli studenti delle superiori. Crediamo però che, qui come già prima con Aristotele, i ragazzi li possano accostare confrontando visivamente, appunto:

- un segmento
- e una successione finita o numerabile di suoi punti, che quindi lo suddividono in intervalli separati

[8] Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor (1845-1918) furono altri due grandi matematici tedeschi.

[9] Ad esempio nelle lezioni V (*La teoria della continuità*) e VI (*Il problema dell'infinito*) di [Ru2], oppure nei capitoli XLII (*La filosofia del continuo*) e XLIII (*La filosofia dell'infinito*) di [Ru3].

e constatando la differenza tra la fluidità dell'uno e il frazionamento degli altri.

Russell cita poi nel suo saggio Georg Cantor e la nascita a lui dovuta della matematica dell'infinito, in cui il classico principio euclideo che "il tutto è maggiore delle sue parti" decade. Spesso infatti, all'infinito, il tutto ha tanti elementi quanto una sua parte, aggiungere o togliere un punto non fa più differenza. Non come succede nei mondi finiti, in cui, se a 4 elementi se ne somma o sottrae 1, si ottengono rispettivamente 5 e 3 e non c'è modo più di stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi che se ne ricavano e quello di partenza.

All'infinito il discorso cambia. E qui si possono proporre dovizie di esempi, a cominciare dall'*albergo di Hilbert*,[10] che si riconnette in modo naturale alla rincorsa di Achille alla tartaruga. Se indichiamo infatti con 0 e 1 rispettivamente le loro posizioni iniziali e poi con 2, 3, 4, … quelle successive (così che eroe e animale giungono contemporaneamente a 1 e 2, poi a 2 e 3, e via dicendo), allora a ogni tappa della rincorsa la tartaruga sta avanti. Perché avvenga il ricongiungimento, Achille dovrebbe contare su un passo in più. Ma nella teoria di Cantor il culmine $\aleph_0$ delle due sequenze:

- quella 0, 1, 2, … dei numeri naturali,
- l'altra 1, 2, 3, … dei loro successori,

è lo stesso: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$,[11] come dire che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca tra loro proprio tramite la funzione che a ogni naturale n associa n+1, anche se il secondo tra loro ha un punto in meno del primo.

Altrettanto accade nello scenario di quel continuo dove, secondo Russell, avviene in realtà l'inseguimento. Tempi e spazi del-

[10] Argomento famoso che un altro grandissimo matematico tedesco, David Hilbert (1862-1943), propose per illustrare le teorie di Cantor sull'infinito matematico.

[11] Non riteniamo improponibile agli studenti delle superiori il simbolo $\aleph_0$ a denotare il primo numero cardinale infinito di Cantor. Altro sarebbe un approccio sistematico ai numeri cardinali, che è assai meno consigliabile.

la rincorsa come intervalli di numeri reali: per esempio quello]0, 1[tra 0 e 1 esclusi. Ecco allora come stabilire una corrispondenza biunivoca con]0, 1], 1 compreso.

Si fissa in]0, 1[una successione, per esempio quella strettamente decrescente e convergente a 0 formata dalle potenze di 1/2, quindi:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

con n che varia tra gli interi positivi (escludiamo $1/2^0 = 1$ perché esterno all'intervallo di partenza). Si definisce poi una funzione f di $]0, 1]$ (1 compreso) in $]0, 1[$ ponendo:

- $f(1) = 1/2$, $f(1/2) = 1/4$, $f(1/4) = 1/8$ e in generale $f(2^n) = 1/2^{n+1}$ per ogni n,
- $f(x) = x$ per ogni altro x di]0, 1], dunque per x diverso da 1 e fuori dalla successione.

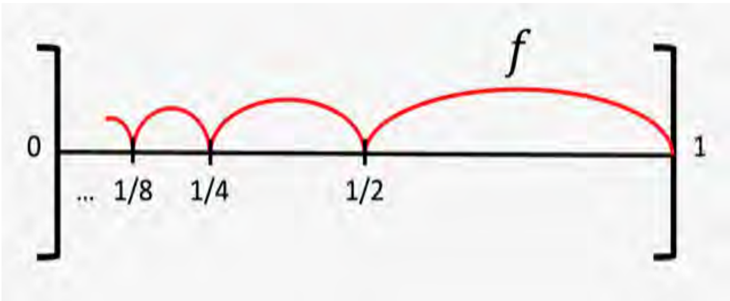

Fig. 1 – La successione delle immagini di *f*.

È facile controllare che f è la biiezione richiesta. Tra l'altro, l'argomento echeggia in qualche modo il paradosso della dicotomia, con i passi successivi che, tramite f, 1 percorre per avvicinarsi a 0; oppure perfino della rincorsa di Achille, che a ogni passo *raggiunge* $f(n)$, la posizione n-ma della tartaruga, che nel frattempo è scappata in $f(n + 1)$. Naturalmente nel secondo caso si potrebbe preferire, seguendo Borges e Tolstoj, la successione decrescente delle potenze di $1/10$ invece di quelle di $1/2$.

Allo stesso modo si procede per costruire una corrispondenza biunivoca di [0, 1] (0 compreso) su]0, 1] e quindi in definitiva su]0, 1[. Si sceglie in]0, 1[una successione, che stavolta può essere crescente e convergente a 1, come per esempio

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$$

sempre con n intero positivo, e si ripete il gioco dalla parte di 0: 0 va in $1/2$, $1/2$ in $3/4$, $3/4$ in $7/8$ e così via.

Ancora più calzante è il caso, ben noto già prima di Cantor, di due segmenti di differente lunghezza (le distanze percorse da Achille e dalla tartaruga, per esempio), eppure altrettanto ricchi di elementi. Una costruzione geometrica familiare convince della loro corrispondenza biunivoca. Basta disporre i due segmenti su due semirette distinte, che siano incidenti in una stessa origine O ma non siano l'una il prolungamento dell'altra, dunque come OA e OA' nella figura che segue. La biiezione si ricava associando a ogni punto P del primo segmento l'intersezione P' del secondo segmento e della parallela per P ad AA'.

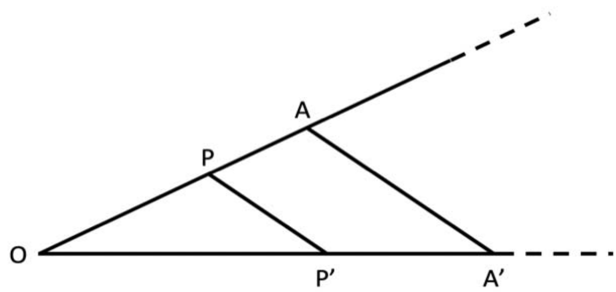

Fig. 2 – La biiezione tra *OA* e *OA'*.

Una conferma algebrica si ottiene altrettanto facilmente: tutti gli intervalli (aperti) $]a, b[$ con $a < b$ in $\mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con]0, 1[e conseguentemente tra loro. Basta considerare la funzione di]0, 1[su]a, b[che si ottiene componendo:

(i) la moltiplicazione per $b - a$ (che manda]0, 1[su]0, $b - a$[ )
(ii) l'addizione per a (che trasla]0, $b - a$[su]a, b[ ).

Infatti entrambe le funzioni di (i) e (ii) sono continue e strettamente crescenti, dunque trasformano intervalli in intervalli e, di questi intervalli, gli estremi inferiore e superiore negli estremi inferiore e superiore.

In tema di paradossi, viene facile citare a questo punto quello della ruota, che Galileo Galilei (1564-1642) propose nel 1638 all'interno dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche di due nuove scienze*. Vi si considerano due ruote concentriche e solidali: quando la maggiore percorre rotolando un giro completo, la più piccola fa lo stesso, così alla fine si ritrova alla stessa distanza dell'altra dalla posizione di partenza: ma la circonferenza della prima è più lunga della seconda. Galileo allora si interrogava su come potesse il cerchio minore scorrere di una lingua tanto maggiore della sua circonferenza. Per chiarire il dilemma si può osservare che, se lo spostamento orizzontale di due punti, uno sulla circonferenza esterna e uno su quella interna, è lo stesso, diverse sono tuttavia le traiettorie che essi compiono: un arco di cicloide per il primo e un arco di curva leggermente diversa il secondo (che è pure soggetto a un effetto di trascinamento). Ma, quand'anche vogliamo limitarci a confrontare i segmenti che rettificano le due circonferenze, possiamo notare come essi, pur diversi per lunghezza, siano in corrispondenza biunivoca tra loro.

Magari, prima di concludere la parentesi sull'infinito, si potranno accennare agli studenti due dei risultati più celebri e affascinanti di Cantor:

- il teorema del 1878 secondo cui in un cubo ci sono tanti punti quanti in un suo spigolo, cioè in un segmento, o in una sua faccia, cioè in un quadrato, e se è per questo pure nell'intera retta, o nel piano, o nello spazio reale tridimensionale;

- quello del 1874, di segno opposto, secondo cui non c'è corrispondenza biunivoca possibile tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, così che l'infinità dei numeri naturali è rigorosamente diversa da quella dei punti di una retta.

Due parole sugli altri paradossi, il terzo e il quarto, e sulla loro possibile spiegazione. Cominciamo dalla freccia, la quale – ricordiamo brevemente l'argomento di Zenone – è ferma in ogni istante e quindi, siccome il tempo si compone di istanti, neppure si muove.

Resta però da fissare che cosa si debba intendere per "istante". Si potrebbe rispondere in modo un po' ingenuo: una frazione minuscola di tempo, così come minuscolo è, al suo trascorrere, lo spazio che la freccia occupa.

Ma, di nuovo, che cosa significa "minuscolo"? Forse 0, tanto per lo spazio quanto per il tempo? Ma allora la velocità della freccia, assunta grossolanamente come il rapporto tra spazio e tempo, sarebbe 0/0, che è forma indeterminata, passibile di ogni valore, e non necessariamente 0, come dovrebbe essere se il dardo resta fermo.

Alternativamente si può interpretare l'aggettivo "minuscolo" nel senso di "infinitesimo": tempi e spazi infinitesimi. Ma l'interrogativo si ripropone: che cos'è un infinitesimo? E qui ritorna il nome di Weierstrass, che seppe accostare rigorosamente questo concetto intuitivo senza evocarlo direttamente, ma approssimandolo nel modo che si è detto, all'interno del campo reale $\mathbb{R}$ tramite le nozioni di limite e poi di derivata. La sua teoria consente allora in fisica una definizione rigorosa di velocità istantanea: il limite, appunto, del rapporto tra spazio e tempo quando quest'ultimo tende a 0. In questa maniera si precisa caso per caso il rapporto indeterminato 0/0, che può essere finito e non nullo, a conferma che la freccia scoccata, "istante per istante", si muove.

Come scriverà a inizio Novecento il filosofo francese Henri Bergson (1859-1941), lui pure Premio Nobel per la letteratura nel 1927), il movimento si compone di immobilità (Bergson, 2012).[12]

In tempi più moderni la così detta *analisi non standard* di Abraham Robinson (1918-1974) dà piena forma al concetto di infinitesimo estendendo i numeri reali ai loro fratelli maggiori chiamati iperreali, tra i quali infiniti e infinitesimi appaiono esplicitamente, con diritto pieno di cittadinanza. Ma anche in questo approccio il rapporto tra spazio e tempo infinitesimi può benissimo essere finito (e non infinitesimo).[13]

Quanto al paradosso dello stadio o, se preferiamo, dei treni che si sfrecciano accanto in direzioni opposte, qui interviene il tema delicato, evidenziato da Galileo, del sistema di riferimento. Il valore del tempo dipende dall'osservatore che lo rileva, per cui può ben capitare che si dimezzi o si raddoppi, a seconda che questo osservatore si trovi a terra, di fianco ai binari, oppure su uno dei convogli.

5 - Intermezzo letterario

Nonostante le finissime spiegazioni matematiche di ben oltre un secolo fa, i paradossi sembrano destare ancor oggi vivezza di interessi e mantenere una loro attualità almeno filosofica ed esistenziale, forse perché figure della parabola umana, essa pure inconclusa, inappagata e indecifrabile. Le citazioni letterarie che li riguardano, di cui abbiamo già fornito qualche esempio, continuano ad abbondare pure nei tempi moderni, dopo la metà dell'Ottocento.

[12] In verità Bergson risolveva i paradossi di Zenone negando che tempo e spazio consistessero di punti e istanti.

[13] Una spiegazione non standard del paradosso della freccia si può trovare in (McLaughlin, 1994). Si tratta però di argomento verosimilmente inadatto per studenti delle superiori.

L'introduzione di Claudio Bartocci ai *Racconti matematici* ne dà ampio resoconto (Bartocci, 2009), e del resto pure il racconto di Borges *Kafka e i suoi precursori* ne fornisce una ricca antologia (Borges, 1984, *Altre inquisizioni*, pp. 1007-1009).

A proposito del paradosso della tartaruga, Borges sostiene in particolare che «[l]a forma di questo illustre problema è, esattamente, quella del Castello» – uno dei romanzi più famosi dello scrittore boemo, la storia incompiuta dell'agrimensore K. e dei suoi inutili tentativi di accedere all'edificio di cui si parla nel titolo. E, ancora, che «Achille è tra i primi personaggi kafkiani della letteratura». Altri racconti di Franz Kafka (1883-1924), da *Davanti alla legge* (che poi sarebbe confluito nell'altro grande romanzo *Il processo*) a *Un messaggio dell'imperatore*, a molti altri, hanno analoga struttura e chiare reminiscenze del paradosso della dicotomia. Possono essere lettura stimolante all'interno del laboratorio (Kafka, 2017).

Dell'attenzione dello stesso Borges per Zenone si è poi già riferito. Non solo i saggi, ma vari racconti dello scrittore argentino condividono e riflettono gli imbarazzi e le angosce scientifiche ed esistenziali dei paradossi sul moto. Citiamo soltanto, da *La scrittura del Dio* (Borges 1984, *L'aleph*, 857-862), il motivo del sogno: l'idea di una vita che forse è solo uno degli innumerevoli sogni di un labirinto, «ognuno dentro un altro, e così all'infinito», e in definitiva è solo vertigine.[14] Un altro modo di intendere l'argomento della dicotomia.

Tra gli scrittori stranieri, e a proposito dei quattro paradossi, è quasi obbligato citare i versi famosi che ai paradossi dedica nel 1920 Paul Valéry (1871-1945) nel *Cimitero marino* (Valéry 1966, p. 21). Nella traduzione italiana di Tutino,

Crudel Zenone, Zenone eleata!
M'hai trafitto con questa freccia alata
Che vibra, vola, e che non vola affatto!
Al suo scoccar son nato, e già m'uccide!

[14] Per approfondimenti rimandiamo a (Toffalori, 2011a), in particolare ai capitoli *Ombre di Gödel in Borges* e *La sostanza dei sogni*, e a (Casolo, 2016).

Ombra di tartaruga, il sole irride
L'anima-Achille, ferma nello scatto!"

Gli studenti delle superiori probabilmente conoscono Kafka, se non Valéry e Borges. Ma certamente frequentano ben più assiduamente la letteratura italiana, dove pure incontriamo una lunga serie di autori moderni e di loro racconti che ai paradossi di Zenone chiaramente si ispirano. Intanto Carlo Emilio Gadda (1893-1973), che dell'inseguimento di Achille dà la sua personalissima cronaca, nel suo inconfondibile linguaggio, all'interno de *Il primo libro delle favole* (Gadda, 1990).

> Ma la tortuca, in fra tanto, avacciò di chel vantaggio un millesimo. Achille fece il millesimo. Ma la Tortuca, in fra tanto, avacciò un millesimo di chel millesimo. Mai dunque poté chiapparla: e ancor oggi e' fuggano.

Poi Italo Calvino (1923-1985), nei racconti "deduttivi" delle *Cosmicomiche*, riuniti in *Ti con zero* (Calvino, 2009, pp. 235-284): da quello che dà il titolo alla raccolta e descrive in lunghe pagine una scena di caccia, e specificamente l'attimo in cui il leone balza sull'arciere e quest'ultimo scocca la sua freccia, a *L'inseguimento*, dove una frenetica caccia all'uomo automobilistica si rallenta e si smorza nei «piccoli spostamenti discontinui» del traffico cittadino; da *Il guidatore notturno*, che pure respira atmosfere zenoniane, a *Il conte di Montecristo*, nel quale l'abate Faria accumula progetti ripetuti e falliti di evasione dalla fortezza d'If, dove lui e Dantès sono imprigionati.

E, ancora, Dino Buzzati (1906-1972) immagina nel suo breve racconto *I sette messaggeri* (all'interno dell'omonima raccolta (Buzzati, 2018) una spedizione che muove verso gli inaccessibili confini di un regno, ma, avventurandosi alla loro ricerca, senza riuscire mai a raggiungerli, dilata sempre più la distanza dalla capitale, tanto che ai messi che vi ritornano per riferire del viaggio e ricevere nuove istruzioni ormai non basta una vita per percorrere avanti e indietro il tragitto.[15]

Tornando in qualche modo a Kafka: nell'altro breve saggio a lui dedicato, *Franz Kafka: La metamorfosi* (Borges, 1985, *Prologhi*, pp. 856-859), Borges definisce «incompleti» i suoi romanzi, incompiuti, ricchi di omissioni, «interminabili» e interminati non solo per difficoltà passeggere di composizione, ma perché inconclusa e irrisolta è la sensibilità dello scrittore, e quindi dei suoi personaggi: tutti identici tra loro, tutti esposti a «un numero infinito di ostacoli».Borges cita al riguardo di nuovo Zenone e il paradosso della dicotomia, «il primo e il più evidente» dei quattro ragionamenti sul moto, e confronta gli innumerevoli punti intermedi del corridore con le «vicissitudini» degli eroi kafkiani, «infinite come l'Inferno».

Viene da pensare che un capolavoro letterario, quale che ne sia l'autore, sia incompiuto, o almeno irrealizzato e perfettibile, non solo a motivo dei suoi personaggi o della sensibilità di chi scrive, ma perché aperto a ogni nuovo lettore, che lo rivive e lo fa proprio, quindi ne accresce l'eco e le impressioni. A proposito di Sterne, come dimenticare la pagina bianca che egli lascia nel capitolo trentottesimo del libro sesto del Tristram Shandy (Sterne, 1990, p. 428), affidando alla fantasia del lettore il piacere di completarla, descrivendo nell'occasione la più bella delle dame? Solo una spiritosaggine, un eccentrico espediente per attirare l'attenzione, oppure la coscienza che l'opera di uno scrittore si prolunga e rinnova nelle reazioni dei suoi cultori e dunque resta eternamente inconclusa? Ricordiamo al riguardo anche gli *Esercizi di stile* (Queneau, 2014) di Raymond Queneau (1903-1976), autore originalissimo, spirito paradossale quanto Zenone, che nell'occasione propone 99 varianti di uno stesso banale episodio, ma poi lascia al lettore di comporre la centesima, a sua discrezione. Oppure ancora Borges e il racconto *Pierre Menard*, autore del «Chisciotte» (Borges, 1984,

[15] Il racconto di Buzzati e il calviniano *Conte di Montecristo* si trovano anche in (Bartocci, 2009), rispettivamente alle pagine 95-99 e 139-151.

Finzioni, pp. 649-658), il cui incredibile protagonista apparentemente ricopia alla lettera alcuni capitoli del capolavoro di Miguel de Cervantes (1547-1616), e tuttavia li assorbe e rigenera proprio in virtù de «i suoi scrupoli e le sue veglie». Così, se altri emuli, e anzi infiniti emuli imitassero Menard nell'impresa, l'ultimo Chisciotte sarebbe ancora, e perennemente, da scrivere.

Sono questi altri spunti letterari che potrebbero animare il laboratorio e accrescerne la sospirata interdisciplinarità.

Un'ultima osservazione: colpisce che gran parte degli autori citati uniscano alla passione per Zenone o al gusto del paradosso pure l'interesse per la matematica, studiata all'Università o accostata più tardi, se non addirittura insegnata – tanto vale per Borges, Gadda, Calvino, Queneau e per il Carroll che incontreremo tra breve – e che altri ancora di questi scrittori – Kafka e Sterne – siano comunque prediletti da molti matematici.

6 - Zenone quantistico

Non c'è solo la letteratura. L'attualità di Zenone si manifesta anche nell'ambito scientifico. Nella fisica moderna, ad esempio, si può sostenere che il paradosso della freccia diventi realtà. Capita infatti che un sistema instabile, quale può essere un nucleo o una particella, non decada – come invece ci si aspetta che faccia – quando si trova sottoposto ad una serie infinita di osservazioni. Un po' come avviene – per ricorrere a un paragone casalingo rozzo ma efficace – a una pentola d'acqua che sta su un fornello acceso, ma ritarda la bollitura se chi deve buttare la pasta è impaziente e solleva troppe volte il coperchio per controllare.

Il legame con Zenone nasce nel 1927 col principio di indeterminazione di Werner Heisenberg (1901-1976), secondo cui in meccanica quantistica è impensabile misurare simultaneamente con uno stesso grado di precisione arbitrario la posizione e la velocità di una particella.[16] Per dirla con le parole di un "addetto ai lavori" – il fisico Anton Zeiliger – riprese dal suo libro (Zeilinger, 2006),

> Il principio di Heisenberg riguarda la precisione con cui possiamo conoscere contemporaneamente la posizione di una particella e la sua velocità. Già il filosofo greco Zenone di Elea, oltre 2000 anni fa, si era posto il problema; per lui una freccia in volo non si poteva trovare, in alcun momento, in un punto determinabile con precisione, perché se così fosse il moto non sarebbe possibile. Il principio di indeterminazione di Heisenberg esprime proprio questo concetto […]. Se sappiamo con molta precisione dove si trova [una particella], allora la sua velocità è molto indeterminata [...]; viceversa, se la particella ha una velocità molto precisa, allora, letteralmente, non si sa dove si trova!

Il così detto *effetto Zenone* fu presagito pure da Alan Turing (1912-1954), che non fu solo grande logico e matematico, ma coltivò una varietà mirabile di interessi, tra cui appunto la fisica quantistica. Per questo oggi il fenomeno è anche chiamato *paradosso di Turing*. Ecco il modo in cui lo riferisce Robin Gandy (1919-1995), che di Turing fu allievo e amico (Gandy & Yates, 2001, p. 267), (Hodges, 2004, p. 54) – il linguaggio è un po' più tecnico di quello di Zeiliger, ma la conclusione è chiara e incisiva.

> È facile provare, usando una teoria standard, che se un sistema parte in un autostato di qualche osservabile, e quell'osservabile è misurato *N* volte al secondo, allora, anche se lo stato non è stazionario, la probabilità che il sistema resti nello stesso stato dopo, diciamo, un secondo tende a 1 quanto *N* tende all'infinito; cioè, che continue osservazioni impediranno il movimento.

A sviluppare il discorso nei suoi dettagli e, soprattutto, a evocare per primi esplicitamente Zenone, furono Misra e Sudarshan nel 1977 (Misra & Sudarshan, 1977).[17] Purtroppo però per apprez-

[16] Il prodotto delle indeterminazioni (errori) Δx, Δp_x delle misure simultanee della posizione e della quantità di moto deve essere sempre: $\Delta x \, \Delta p_x \geq h/4\pi$ (h: costante di Planck).
[17] Un resoconto abbastanza recente e discorsivo delle ricerche in corso sull'argomento si trova in (Itano, 2019).

zare compiutamente il loro contributo servono concetti, come osservabili, autostati, hamiltoniane, equazioni di Schrödinger, formalismi di Dirac eccetera, che esulano dalle conoscenze dello studente medio delle scuole superiori. Neppure l'intuizione aiuta: la meccanica quantistica è lontana dall'esperienza quotidiana, che è dominata in genere dalla fisica classica, e non di rado, se le viene applicata, conduce a conclusioni paradossali come quelle zenoniane. Possiamo però almeno azzardare per il nostro laboratorio qualche spiegazione grossolana ma semplice, tipo quella che segue.

Supponiamo di prendere un atomo in uno stato eccitato e instabile e di sottoporlo a una serie di misurazioni ripetute nel tempo per determinare la sua condizione. Ricordiamo che in meccanica quantistica ogni osservazione (misurazione) causa il collasso della funzione d'onda, permettendo allo stato iniziale di permanere indefinitamente.

Osservare vuol dire inviare dei fotoni, quindi energia, che permettono di conoscere lo stato dell'atomo una volta riflessi; misurare implica generare interazioni tra materia e radiazione, tali che la probabilità di transizione di un sistema illuminato da una radiazione incoerente dipenda linearmente dal tempo impiegato per la misurazione.

Immaginiamo, per semplicità, un sistema a due stati, uno di quiete e uno eccitato, che indichiamo rispettivamente con 1 e 2. In generale, se uno stato eccitato ha un tempo di vita τ, la probabilità che esso transisca dopo un tempo $t \leq \tau$ nello stato fondamentale di quiete, si potrà valutare come:

$$P_{2\rightarrow 1}(t) = \frac{t}{\tau}\,.$$

Di conseguenza, la probabilità che dopo un tempo di misura t l'atomo sia ancora nello stato eccitato equivale a:

$$P_2(t) = 1 - \frac{t}{\tau}\,.$$

Se la misurazione rivela che l'atomo è ancora nel suo stato eccitato, ciò implica che la funzione d'onda è collassata di nuovo a quello stato: dunque il processo ricomincia da capo.

Se si misura ancora il sistema ad un nuovo tempo $2t$, la probabilità che l'atomo si riveli nello stato eccitato sarà ovviamente $\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^2$ e, per valori piccoli di t, si può approssimare con $1-2\frac{t}{\tau}$, cioè col valore $P_2(2t)$ che si otterrebbe calcolando direttamente la probabilità dopo un tempo di misura pari a $2t$, invece di effettuare la doppia misura. In questo senso, non c'è alcuna differenza tra ripetere due volte il controllo e misurare dopo il doppio del tempo.

Tuttavia, per regimi temporali estremamente brevi l'evoluzione degli stati eccitati cambia e l'andamento che si rivela è quadratico nel tempo:

$$P_{2\to 1}(t) = \frac{t^2}{\tau}\,.$$

Perciò all'istante di tempo $2t$ la probabilità che l'atomo si trovi ancora nello stato eccitato sarà

$$P_2(2t) = \left(1-\frac{t^2}{\tau}\right)^2 \approx 1-2\frac{t^2}{\tau}\,.$$

Invece, in assenza di misurazione, la stessa probabilità sarebbe semplicemente

$$P_2(2t) = \left(1-\frac{4t^2}{\tau}\right)^2 \approx 1-4\frac{t^2}{\tau}\,.$$

(dove con $\approx$ intendiamo una ragionevole approssimazione). Applicando il ragionamento a N misurazioni ad intervalli regolari di tempo $t = T/N$ (dove T è il periodo totale di una osservazione) troviamo che, al crescere di N verso l'infinito, la probabilità di trovare l'atomo nello stato eccitato tende a 1, dunque il fenomeno si verifica sempre. Infatti si ha:

$$\left(1-\frac{1}{\tau}\left(\frac{T}{N}\right)^2\right)^N \approx 1 - N\frac{T^2}{\tau N^2} = 1 - \frac{T^2}{\tau N},$$

così che, al crescere di N, $\left(1-\frac{1}{\tau}\left(\frac{T}{N}\right)^2\right)^N$ tende a 1.

Insomma, un eccesso di attenzioni blocca l'atomo nel suo stato eccitato, al modo della freccia del paradosso di Zenone.

È giusto tuttavia menzionare, per completezza, altre teorie più recenti, secondo cui misurazioni ripetute, ma operate a un ritmo più lento, possono accelerare il decadimento di una particella anziché ostacolarlo – un fenomeno che è chiamato *effetto anti-Zenone quantistico* (Kofman & Kurizki, 2000).

Per tornare al caso della pentola sul fornello, la fisica quantistica sembra confermare, almeno con l'effetto Zenone, la visione "classica": meglio evitare di alzare il coperchio, anche a rischio che l'acqua trabocchi, perché più si perturba il sistema e più si attarda l'ebollizione. Oppure – l'effetto anti-Zenone – meglio sollevare il coperchio nei tempi giusti, con moderazione.

Meno convincente ci pare il collegamento diretto, operato da Zeiliger, tra l'argomento della freccia e il principio di indeterminazione di Heisenberg. Quest'ultimo non sembra riprodurre esattamente il senso del ragionamento zenoniano. Per l'antico filosofo (stando al resoconto di Diogene Laerzio) la freccia non si muove né nel luogo dove è né in quello dove non è: nel luogo dove è, perché lo occupa, in quello dove non è appunto perché non c'è. Insomma, la sua posizione nello spazio è incompatibile col movimento. In Heisenberg, invece, sono le indeterminazioni di posizione e velocità a mostrarsi incompatibili con uno stesso grado di precisione arbitrario (quindi molto spinto). Dunque la velocità, e con lei il movimento, possono risultare indefiniti ma non certo impossibili. Il principio di indeterminazione non nega di per sé l'eventualità del moto.

7 - Zenone nel paese delle meraviglie

Pure Lewis Carroll,[18] l'autore dei romanzi di Alice, fu spirito surreale, creatore fantasioso e fantastico di storie e rompicapo logici. Non stupisce allora di incontrare nella sua opera la trasposizione dell'argomento di Zenone su Achille e tartaruga nel mondo dei ragionamenti. Stavolta però il percorso da affrontare è un sillogismo, il punto di partenza è la sua premessa e l'irraggiungibile punto di arrivo la sua conclusione. La storia di Carroll, intitolata *What the Tortoise said to Achilles*, risale al 1895, dunque agli ultimi anni di vita del suo autore, e fu pubblicata sulla rivista «Mind» (Carroll, 2016). Vi si immagina che Achille e la tartaruga, abbandonata la loro inconcludente rincorsa, si fermino a discutere della «prima proposizione di Euclide», e cioè la costruzione, proprio all'apertura degli *Elementi*, di un triangolo rettangolo di lato assegnato AB. Ricordiamone brevemente le tappe (figura 3):

- si tracciano le circonferenze con raggio AB e centro rispettivamente in A e B;
- si considera uno dei punti di intersezione (che chiamiamo C);
- si nota che AC è raggio della prima circonferenza, ed è quindi uguale ad AB, e che BC è raggio della seconda circonferenza, come tale ancora uguale ad AB;
- si conclude che AC e BC, in quanto uguali ambedue ad AB, sono uguali tra loro.

Una parentesi, per rilevare come il secondo passaggio, cioè la costruzione di C, è in realtà controverso, perché niente nelle pagine precedenti degli *Elementi* assicura che le due circonferenze si debbano incontrare – l'intuizione visiva sì, ma non lo scritto di Euclide.

[18] Pseudonimo di Charles Dogdson, 1832-1898.

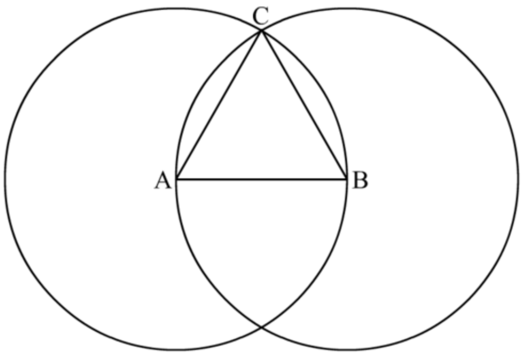

Fig. 3 – La costruzione euclidea del triangolo equilatero.

Torniamo a ogni modo a Carroll, e a tartaruga e Achille che discutono il sillogismo finale:

a) due cose uguali a una terza sono uguali tra loro;
b) i due segmenti AC e BC sono uguali ad AB;
z) i due segmenti AC e BC sono uguali tra loro.

La tartaruga ne accetta le premesse a) e b), ma nega che da sole giustifichino la conclusione z). Rileva la necessità di interporre un'ulteriore ipotesi c):

a) due cose uguali a una terza sono uguali tra loro;
b) i due segmenti AC e BC sono uguali ad AB;
c) se a e b sono valide, z è valida;
z) i due segmenti AC e BC sono uguali tra loro.

Achille concorda. Ma a questo punto la tartaruga dichiara di accettare la validità di a), b) e c), ma non per questo di z), e induce Achille a un'ulteriore interpolazione:

d) se a, b e c sono valide, z è valida.

Il gioco prosegue senza fine. Anzi, «[a]lcuni mesi più tardi […] Achille era ancora seduto sul guscio della paziente tartaruga e scriveva sul taccuino, che sembrava tutto riempito» – questo è l'epilogo del racconto.

Dal punto di vista del ragionamento logico, l'argomento di Carroll – che del resto, oltre che scrittore, fu anche professore di matematica in uno dei college di Oxford (Wilson, 2008) – evidenzia l'importanza di concordare anticipatamente, nell'uso dei sillogismi e più in generale nel calcolo deduttivo, regole specifiche che sovrintendano alle dimostrazioni e le indirizzino, un po' come la programmazione dei moderni computer. Nel caso specifico, quella che da a) e b) conduce a z) senza altri indugi. Ma al di là dei dettagli teorici, la storia, e l'adattamento del paradosso zenoniano ai meccanismi logici della mente, testimoniano la felice creatività del loro autore.[19]

A proposito di Zenone e di Lewis Carroll, è giusto citare un altro passo dello scrittore inglese, che stavolta accenna in modo spiritoso al primo paradosso della dicotomia. Lo troviamo in *A tangled tale* (*Una storia intricata*), serie di racconti con relativi problemi matematici che risale ancora al 1895 (Carroll, 2004). Nell'edizione originale, e anche in (Carroll, 2004), le storie che si leggono sono illustrate e allietate da sei gradevolissimi disegni di Arthur B. Frost (1851-1928).

Tra i personaggi incontriamo quello di Balbus, che può ritenersi come un autoritratto dello stesso Carroll, come lui malinconico, solitario, balbuziente, amante della matematica e con uno spiccato gusto per l'assurdo.

Il secondo problema del nodo 9 propone una sua riflessione, ispirata da una premessa di fisica elementare: «Quando un solido è immerso in un liquido, è noto che esso sposta una parte del liquido pari al proprio volume e che il livello del liquido sale di tan-

[19] Al breve racconto di Carroll si ispirerà Douglas Hofstadter nel suo famosissimo libro (Hofstadter, 1984) che pure ospita dialoghi tra Achille, la tartaruga e altri personaggi immaginari. I primi due di questi dialoghi fanno specifico riferimento ai paradossi di Zenone.

to quanto salirebbe se vi fosse stata una quantità di liquido pari al volume del solido». Ma a questo punto, inferisce Balbus, una maggior porzione di solido si trova immersa dall'ulteriore innalzamento del liquido, del quale produce di conseguenza una nuova salita di livello. Si genera così una sorta di reazione a catena, un processo che trova il suo epilogo solo quando tutto il solido finisce sommerso. Balbus prosegue con un esempio surreale:

> Prendiamo dunque l'immagine familiare di un uomo in piedi in riva al mare, durante il riflusso della marea, che immerge parzialmente un solido che tiene in mano: egli rimane saldo e fermo lì e tutti noi sappiamo che prima o poi annegherà.

Il problema che, sulla base di questa premessa, (Carroll, 2004) propone ai lettori è quello, appunto, di un solido immerso in un recipiente pieno di acqua, la quale di conseguenza si alzerà progressivamente prima di due pollici, poi di uno, poi di mezzo, eccetera, ma senza che la serie abbia mai fine. Si conclude che allora l'acqua salirà all'infinito. Si chiede al lettore verifica di questa congettura.

La situazione richiama Zenone e il suo corridore, che muovendosi percorre ogni volta metà del tragitto precedente. La soluzione ribadisce quanto già sappiamo. La serie dei successivi innalzamenti non arriverà mai all'infinito, anzi non raggiungerà mai neppure i 4 pollici: infatti, osservano Balbus e dietro di lui Carroll, «quale che sia il numero di termini, siamo sempre lontani dai 4 pollici di una quantità pari all'ultimo termine assunto». Nei dettagli la serie infinita $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ converge a 4, ma ogni sua somma parziale n-ma rimane inferiore a 4, anzi

$$4-\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\ .$$

Nulla di nuovo, rispetto a quanto già conosciamo. Ma può darsi che quest'ulteriore appendice avvinca ancor più gli studenti.

8 - Incompletezze

Un'eco dei paradossi di Zenone si coglie anche in risultati più sostanziali della matematica moderna. Alludiamo ai *Teoremi di Incompletezza* di Kurt Gödel (1906-1978) del 1931. Sintetizziamo brevemente il primo, e il più famoso dei due, in una forma adeguata agli studenti delle superiori. Consideriamo allora una teoria matematica rigorosa:

- coerente, cioè priva di incongruenze e contraddizioni,
- umanamente comprensibile, cioè accessibile a chiunque la studi con un minimo di applicazione e pazienza,
- capace di trattare l'aritmetica elementare, cioè i numeri naturali con le loro operazioni di addizione e moltiplicazione.

Allora questa teoria non sarà mai *completa*: sperimenterà cioè, già a proposito di $\mathbb{N}$, affermazioni che non sa decidere, e cioè né dimostrare né confutare. Nessun sistema ipotetico-deduttivo sfuggirà a questo difetto. Ogni proposizione indecidibile non si potrà dirimere se non accogliendola, affermata o negata, tra gli assiomi. Ma a quel punto una nuova affermazione emergerà nel sistema così ampliato, con le stesse caratteristiche, ossia con la stessa ambiguità.

Il teorema di Gödel evidenzia allora, perfino in matematica, l'incapacità della mente umana di conoscere e comprendere fino in fondo. Testimonia tuttavia la coscienza di questa incapacità perché addirittura la dimostra come un teorema. Implica in definitiva che l'uomo è essere limitato, ma consapevole del suo limite. Richiama in questo *L'infinito* leopardiano, quando descrive la

… siepe, che da tanta parte
de l'ultimo orizzonte il guardo esclude

ma allora immagina

… interminato
spazio di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quiete.

Il paragone letterario potrà interessare e forse affascinare i ragazzi. Gli studenti saranno poi curiosi di conoscere qualche esempio esplicito di enunciato sui numeri naturali e sulle loro operazioni di addizione e moltiplicazione che resta però *indeciso*, cioè indimostrato e inconfutato, all'interno delle teorie più comuni che trattano l'aritmetica: magari vero in $\mathbb{N}$ eppure privo di prova. Non è facile proporne di accessibili. Si potrà però accennare a questo proposito a certe questioni classiche sui numeri naturali, semplici in apparenza eppure ancora aperte e in attesa da secoli di risposta.

La congettura di Goldbach è tra le prime che vengono in mente, appunto perché agevole da spiegare e comprendere. Ricordiamo che essa risale al 1742 e alla corrispondenza epistolare che in quell'anno si ebbe tra il grande matematico svizzero Leonhard Euler, cognome italianizzato in Eulero (1707-1783), e il suo collega prussiano Christian Goldbach (1690-1764). La congettura sostiene che ogni numero naturale pari > 2 si esprime come la somma di due primi. Dovizie di esempi la sostengono, a cominciare dai più elementari

$$4 = 2 + 2,\ \ 6 = 3 + 3,\ \ 8 = 3 + 5,\ \ 10 = 5 + 5 = 3 + 7,$$
$$12 = 5 + 7, \qquad 14 = 7 + 7 = 3 + 11, \ldots$$

a quelli, più complicati, che i calcolatori di oggi sanno sfornare. Ma, a dispetto della sua età di quasi tre secoli e degli sforzi dei grandi matematici che l'hanno affrontata, l'ipotesi di Goldbach ed Eulero è questione ancora irrisolta. Una risposta conclusiva, positiva o negativa, è di là da venire. Meno che mai c'è da aspettarsi che arrivi da un controllo caso per caso, applicato a ogni possibile numero pari > 2. Infatti questi numeri sono infiniti. Dunque:

- se la congettura è vera, occorrono infinite verifiche per confermarla, e nessun computer al mondo è capace di eseguirle,
- se invece è falsa, allora sì, per dimostrarla basta esibire un solo esempio di un numero pari > 2 che non si decompone nella somma di due numeri primi più piccoli, che prima o poi una verifica paziente al calcolatore saprà certamente rivelare.

Ma solo se si verifica questo secondo caso – previsione impossibile a priori! – un approccio del genere potrà avere successo.

Semmai una mente smaliziata saprà dedurre dalle precedenti considerazioni che la congettura, se indecidibile, è vera. Infatti, se è falsa, allora si prova che è falsa, e quindi si decide. Ma è forse pretesa eccessiva esigere questa riflessione dagli studenti delle superiori.

Torniamo al teorema di Gödel, che si può interpretare, esso pure, in riferimento a Zenone e all'inseguimento di Achille e tartaruga. Nel suo caso, però, la rincorsa è puramente ideale:

- la tartaruga è la verità dell'aritmetica,
- Achille è l'anelito umano di assiomatizzarla in modo coerente e completo,
- le tappe successive della ricerca sono i sistemi ipotetico-deduttivi che l'eroe conseguentemente elabora, ognuno condannato a sperimentare enunciati indecidibili che lo trascendono,
- la conclusione è che Achille non raggiungerà mai il suo intento.

Scopriamo così che pure la matematica, o per meglio dire l'aritmetica, condivide ancora oggi gli antichi disorientamenti del personaggio di Omero.

9 - La macchina di Zenone

I paradossi di Zenone forniscono qualche spunto perfino in informatica: non banale, ma intrigante e capace di stimolare nei ragazzi la riflessione su storia, poteri e limiti dei calcolatori. Conviene dunque accennarlo, sia pure, come già per la fisica quantistica, con la dovuta prudenza.

La nascita dei computer è in genere collegata ad Alan Turing e al suo articolo del 1936 (Turing, 1936-37), dove per la prima volta prendono forma i concetti moderni di:

- programma (la *macchina di Turing*),
- software, cioè repertorio di programmi (la *macchina di Turing universale*).

Tra le ragioni che mossero Turing nella sua ricerca ci furono proprio i teoremi di incompletezza di Gödel e l'accertata impossibilità, da parte della mente umana, di sovrintendere completamente ai numeri naturali e ai loro conteggi con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione. Venne allora spontaneo domandarsi: che cosa si può, o non si può calcolare in $\mathbb{N}$? E che cosa significa anzitutto calcolare?

La risposta di Turing propose il modello computazionale – la macchina di Turing – che abbiamo appena ricordato, ispirato al suo autore dal comportamento di un impiegato diligente. Per citare le parole dello stesso Turing all'inizio di (Turing, 1936-37) «[p]ossiamo paragonare un uomo intento a computare […] un numero a una macchina». E anzi – parole ancora di Turing, sebbene provenienti da altri articoli (Copeland, 1997, *Some key remarks by Turing*) – «un uomo provvisto di carta, lapis e gomma», «soggetto a una stretta disciplina», «che lavora su regole fisse e senza capire», è a tutti gli effetti una macchina.

La tesi di Church – dal cognome del logico americano Alonzo Church (1903-1995) – accreditò la macchina di Turing come la risposta adeguata ai precedenti interrogativi. Sostenne cioè che un problema che riguarda i numeri naturali, o che ai numeri naturali si può ridurre codificandone i dati, ammette un algoritmo di soluzione se e solo se c'è una macchina di Turing che provvede all'intento, e quindi, in assenza di una tale macchina, rimane sprovvisto di qualsiasi procedura di risposta.

La tesi di Church, nella forma in cui l'abbiamo esposta, mantiene ancor oggi intatta la sua validità (Copeland, 1997). Sul suo fondamento si scoprono però, in informatica e in matematica, problemi esprimibili in termini di $\mathbb{N}$ ma privi di soluzione. Gli esempi più famosi sono forse improponibili alle scuole superiori.[20]

Tuttavia, per insinuare le difficoltà computazionali che così emergono, basterà accennare nuovamente alla congettura di Goldbach – un interrogativo che riguarda proprio i numeri naturali. Come abbiamo appreso da poco, nessun calcolatore sembra capace di risolverla, almeno nel caso in cui la risposta è positiva e la procedura seguita è quella per forza bruta, consiste cioè in una verifica metodica di tutti gli infiniti casi possibili. Infatti, conviene ribadirlo:

- o un esempio negativo esiste, e allora almeno in linea di principio il computer che così procede prima o poi lo trova,
- o l'esempio non c'è, ossia la congettura è vera, e allora neppure miliardi di miliardi di miliardi di controlli bastano ad attestarlo.

Nel caso specifico del problema di Goldbach, tuttavia, si può confidare che idee più brillanti, o strategie più sottili, garantiscano una soluzione, prescindendo forse perfino dall'apporto dei computer. Ma in generale si deve prendere atto, come già si diceva, dell'esistenza di problemi che le macchine di Turing non sanno risolvere e quindi, assumendo la tesi di Church, sfuggono a ogni soluzione.

Tra i numeri naturali, però. È lì che sorgono questi ostacoli. Infatti l'informazione che i calcolatori gestiscono, ossia gli input, gli output e i singoli passi delle loro computazioni, si esprimono di

[20] Per approfondimenti ci permettiamo di suggerire (Toffalori, 2015).

solito sotto forma di stringhe finite di 0 e 1, e quindi di numeri naturali, rappresentati nella base 2 invece che in quella tradizionale 10. Ma proprio le considerazioni di Russell sui paradossi di Zenone ci hanno indicato che la natura si manifesta talora tramite insiemi numerici più ricchi di $\mathbb{N}$, come quello $\mathbb{R}$ dei reali. Ebbene, un numero reale irrazionale, quale π, si esprime con un allineamento decimale infinito e aperiodico. Quindi un computer può approssimarlo più o meno brutalmente, nel caso di π come 3 o 3,14 o con misure più raffinate, ma sempre in modo finito e di conseguenza imperfetto.

A questa prima difficoltà se ne aggiunge un'altra, relativa alla durata delle computazioni e cioè all'efficienza di un programma. Talora i calcoli di una macchina di Turing, quand'anche garantiscono in teoria un buon esito, cioè una risposta, poi nella pratica si prolungano eccessivamente, oltre ogni limite prevedibile di attesa ragionevole.

Ecco allora che sorge il desiderio di macchine più potenti, sia per l'ambito in cui operano, sia per i tempi con cui lavorano. Si aprono, o si auspica che si aprano, nuovi orizzonti capaci di venire incontro a queste esigenze – la così detta *iper-computazione* (Copeland, 2004), (Pogieter, 2006), che in anni anche recenti ha suscitato l'entusiasmo di alcuni e la critica intransigente di altri (Davis, 2004). Non è davvero il caso di soffermarsi sull'argomento e sulle relative polemiche, se non per quanto concerne i paradossi sul moto. Tra i modelli iper-computazionali, infatti, è stata proposta pure una *macchina di Zenone*, che si potrà senz'altro presentare ai ragazzi, se non altro come curiosità.

A suggerirla fu un grande matematico del Novecento, Hermann Weyl (1885-1955), il quale nel 1927 si domandò se dal punto di vista fisico o meglio cinematico fosse plausibile, e addirittura realizzabile, l'idea di un automa che svolge computazioni di lunghezza infinita in un tempo finito (Weyl, 2009, p. 42). Una *macchina di Zenone*, per l'appunto, che magari impiega fino a mezz'ora per svolgere il suo primo passo, ma poi accelera, riducendo il tempo interno di lavoro ogni volta della metà: dunque il secondo passo richiede un quarto d'ora, il terzo sette minuti e mezzo, e in generale quello n-mo una porzione 2^n-ma di un'ora.

In questo modo perfino la congettura di Goldbach si risolverebbe in 60 minuti. È vero, infatti, che i numeri pari sono infiniti, ma l'n-mo tra loro si potrebbe controllare nell'intervallo 2^n, e sappiamo che

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1\,.$$

10 - Conclusione

L'esito dei due precedenti capitoli e gli imbarazzi con cui si scontrano questioni fondamentali di aritmetica e di informatica teorica non sono poi così stupefacenti. Ancor più dell'assiomatizzazione dei numeri naturali o dei limiti di efficienza dei calcolatori, la scienza nel suo complesso – almeno la sua parte più autentica – è non un'esperienza compiuta e rifinita, un traguardo raggiunto e appagante, ma piuttosto, come già sottolineato a proposito delle serie, una ricerca continua, curiosa, inquieta e interminabile verso tappe sempre nuove. Analoga in questo alla rincorsa di Achille. Differente tuttavia, e anzi opposta, perché animata da una fiducia, un dinamismo, un desiderio di muoversi e cercare che sono antitetici rispetto all'immutabilità predicata da Parmenide e suffragata da Zenone. Ecco, questa potrebbe essere, per la scienza e per l'essenza della vita, un'altra possibile risposta ai paradossi del moto – da approfondire e discutere con i ragazzi.

In definitiva gli argomenti di Zenone paiono ispirare, al di là dell'interesse specifico per la loro soluzione, spunti di riflessione e dibattito, quali si addicono a ogni buon laboratorio. Confidiamo allora che questa nostra proposta si riveli di una qualche utilità. Quanto ai paradossi, molte altre informazioni spicciole e considerazioni molto più approfondite si potrebbero aggiungere. Ma preferiamo fermarci qui. Rimandiamo semmai, per il secondo obiettivo, ai contributi raccolti in (Salmon, 2001).

Bibliografia

ARISTOTELE (2008). *Opere: Fisica, Del cielo, Dell'anima, Storia naturale, Metafisica*. Milano: Mondadori.

BARTOCCI Claudio (cur.) (2009). *Racconti matematici*. Torino: Einaudi.

BERGSON Henri (2012). *L'evoluzione creatrice*. Milano: Rizzoli.

BORGES Jorge Luis (1984). *Tutte le opere. Volume I*. Milano: Mondadori.

BORGES Jorge Luis (1985). *Tutte le opere. Volume II*. Milano: Mondadori.

BUZZATI Dino (2018). *I sette messaggeri*. Milano: Mondadori.

CALVINO Italo (2009). *Tutte le cosmicomiche*. Milano: Mondadori.

CARROLL Lewis (2004). *Una storia intricata. Racconti matematici*. Viterbo: Stampa alternativa.

CARROLL Lewis (2016). What the Tortoise Said to Achilles. «*Mind*» 104 (1895), pp. 691-693. Traduzione italiana: Quello che la tartaruga disse ad Achille. Roma: Castelvecchi.

CASOLO Carlo (2016). Matematica e sogni nella letteratura. In: Maroscia Paolo, Toffalori Carlo, Tortoriello Francesco Saverio, Vincenzi Giovanni (cur.). *Matematica e letteratura. Analogie e convergenze*. Novara: UTET - De Agostini, pp. 199-233.

COPELAND B, Jack (1997). *The Church-Turing Thesis. Stanford Encycl. Of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/church-turing/.

COPELAND B. Jack (2004). Hypercomputation: Philosophical Issues. «*Theoretical Computer Science*» 317, pp. 251–267.

COPELAND B. Jack (a cura di) (2004). *The Essential Turing: Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence, and Artificial Life*. Oxford: University Press.

DAVIS Martin (2004). The myth of hypercomputation. In (Teuscher, 2004), pp. 195-212.

DIOGENE LAERZIO (2008-10). *Vite dei filosofi*. Bari: Laterza.

GADDA Carlo Emilio (1990). *Il primo libro delle favole*. Milano: Mondadori.

GARDNER Martin (1972). *6th Book of Mathematical Diversions from Scientific American*. San Francisco: W. H. Freeman.

GANDY Robin O, YATES C. E. Mike (cur.) (2001). *Mathematical Logic*. *Collected works of A. M. Turing.* Amsterdam: North Holland.

HARDY Godfrey H. (1973). *Divergent series*. Oxford: University Press.

HEGEL Georg Wilhelm Friedrich (1967*). Lezioni sulla storia della filosofia*. Firenze: La Nuova Italia.

HODGES Andrew (2004). What would Alan Turing have done after 1954? In (Teuscher, 2004), pp. 43-58.

HOFSTADTER Douglas (1984). *Gödel*, *Escher*, *Bach: un'eterna ghirlanda brillante*. Milano: Adelphi.

ITANO Wayne M. (2019). The quantum Zeno paradox, 42 years on. «*Current Science*» 116, pp. 201-204.

KAFKA Franz (2017). *Tutti i racconti*. Milano: Mondadori.

KIERKEGAARD Søren (2008). *La ripetizione*. Milano: Rizzoli.

KOFMAN Abraham G., KURIZKI Gershon (2000). Acceleration of quantum decay processes by frequent observations. «*Nature*» (London) 405, pp. 546–550.

McLAUGHLIN William I. (1994). Resolving Zeno's Paradoxes. «*Scientific American*» 271(5), pp. 84–89.

MISRA Baidyanath, SUDARSHAN E. C. George (1977). The Zeno's paradox in quantum theory. «*J. Math. Phys.*» 18, pp. 756-763.

NICOTRA Luca (2017). Zenone tra filosofia e scienza. *«ArteScienza»*, Anno IV, N. 7, pp. 5-30.

PARMENIDE (2001). *Sulla natura*. Milano, Bompiani.

PLATONE (1998). *Parmenide*. Bari, Laterza.

POTGIETER Petrus H. (2006). Zeno machines and hypercomputation. «*Theoretical Computer Science*» 358, pp. 23-33.

QUENEAU Raymond (2014). *Esercizi di stile*. Torino: Einaudi.

RUSSELL Bertrand (1970). *Misticismo e logica e altri saggi*. Milano: Longanesi.

RUSSELL Bertrand (1995). *La conoscenza del mondo esterno*. Milano: TEA.

RUSSELL Bertrand (2011). *I principi della matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

SALMON Wesley (cur.) (2001). *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis: Hackett.

SIMPLICIO (1989). *On Aristotle's Phisics*. London: Duckworth.

SIMPLICIO (1995). On Aristotle's Physics. In: Cohen Marc, Curd Patricia, Reeve David (cur.). *Readings in Ancient Greek Philosophy From Thales to Aristotle*. Indianapolis: Hackett, pp. 58-59.

STERNE Laurence (1990). *La vita e le opinioni di Tristram Shandy, gentiluomo*. Torino: Einaudi.

TEUSCHER Christof (cur.) (2004). *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*. Berlin-Heidelberg: Springer.

TOFFALORI Carlo (2011). Aspettando Achille. «*Periodico di Matematiche*» 3 (XI), pp. 41-51.

TOFFALORI Carlo (2011a). *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura*. Parma: Guanda.

TOFFALORI Carlo (2015). *Algoritmi*. Bologna: il Mulino.

TOLSTOJ Lev (2015). *Guerra e pace*. Milano: Mondadori.

TURING Alan M. (1936-37). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings London Mathematical Society* 42 (2), pp. 230–265, ristampato in (Copeland, 2004), pp. 58-90.

UNTERSTEINER Mario, REALE Giovanni (2011). *Eleati. Parmenide – Zenone – Melisso. Testimonianze e frammenti*. Milano: Bompiani.

VALÉRY Paul (1966). *Il cimitero marino.* Torino: Einaudi.

WEYL Hermann (2009). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: University Press.

WILSON Robin (2008). *Lewis Carroll in Numberland. His Fantastical Mathematical Logical Life*. London: Penguin.

ZEILIGER Anton (2006). *Il velo di Einstein. Il nuovo mondo della fisica quantistica*. Torino: Einaudi.

ArteScienza
Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"