Federigo Enriques: tra filosofia e matematica

Parte II

Luca Nicotra*

DOI:10.30449/AS.v6n12.101

Ricevuto 04-10-2019 Approvato 28-12-2019 Pubblicato 31-12-2019

La prima parte di questo articolo è stata pubblicata in «ArteScienza» N.10.

Sunto: *Federigo Enriques è stato una delle figure di primo piano nel panorama culturale, non soltanto italiano ma anche europeo, della prima metà del secolo XX. Matematico, filosofo e storico della scienza, grande didatta ha lasciato in ciascuno di questi campi opere che - come disse Guido Castelnuovo - «basterebbero da sole a riempire ed illustrare l'intera vita di uno scienziato». La letteratura su Federigo Enriques è immensa. Qui si vuole tratteggiare la sua figura di intellettuale a tutto campo, ponendo in evidenza la straordinaria varietà dei suoi interessi culturali, che ne fanno uno dei più notevoli riferimenti per il superamento delle barriere fra le cosiddette due culture, sempre unite nel pensiero dell'Enriques.*

Parole Chiave: filosofia della scienza, Scientia, storia della scienza, razionalismo critico, principi della geometria, psicologia fisiologica.

Abstract: *Federigo Enriques was one of the leading figures in the cultural landscape, not only Italian but also European, of the first half of the twentieth century. Mathematician, philosopher and historian of science, great teacher has left in each of these fields works that - as Guido Castelnuovo said - "alone would be enough to fill and illustrate the entire life of a scientist". The literature on Federigo Enriques is immense. Here we want to outli-*

* Direttore responsabile di «ArteScienza», del «Bollettino di Filosofia delle Scienze Umane» e del «Periodico di Matematica».Ingegnere meccanico e giornalista, Presidente dell'Associazione culturale "Arte e Scienza", accademico onorario della Nuova Accademia Piceno Aprutina dei Velati e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; luca.nicotra1949@gmail.com.

nehis intellectual figure in all areas, highlighting the extraordinary variety of his cultural interests, which make it one of the most remarkable references for overcoming the barriers between the so-called two cultures, always united in the thought of Enriques.

Keyword: philosophy of science, Scientia, history of science, critical rationalism, principles of geometry, physiological psychology.

Citazione: Nicotra L., *Federigo Enriques: tra filosofia e matematica. Parte II*, «ArteScienza», Anno VI, N. 12, pp. 5-36, DOI:10.30449/AS.v6n12.101.

5 - I tre volti di Federigo Enriques: matematica, filosofia e storia della scienza

Come scrisse Guido Castelnuovo (1947) nel necrologio pronunciato nella seduta dell'Accademia Nazionale dei Lincei in data 11 gennaio 1947, Federigo Enriques «ha coltivato con pari profondità tre indirizzi, la matematica, la fìlosofia, la storia della scienza, ed ha scritto in ciascuno di essi opere che basterebbero da sole a riempire ed illustrare l'intera vita di uno scienziato». Benché non sia possibile separare nella sua personalità i tre indirizzi,[21] è forse possibile, almeno nella cronologia delle sue opere scritte, distinguerli in tre periodi: 1893-1906 (matematica), 1906-1922 (filosofia) e 1922-1946 (storia della scienza). Ovviamente si tratta soltanto di una schematizzazione basata sulla prevalenza in ognuno dei periodi suddetti di opere dell'uno o dell'altro indirizzo.

Fig. 17 - Federigo Enriques.

Nella prima parte di questo lavoro è stata posta l'attenzione

21 Abbiamo già citato nella prima parte di questo articolo come l'interesse alla matematica fosse nato in Enriques da quello per la filosofia fin dal liceo. La sua stessa opera matematica ha sempre portato l'impronta filosofica.

Fig. 18 - Lapide commemorativn nella casa natale di Federigo Enriques a Livorno.

sulla personalità dell'Enriques come grande intellettuale e riformatore della cultura in Italia e nel più ampio scenario dell'Europa del suo tempo, facendo emergere, in particolare, il suo impegno per l'affermazione dell'interdisciplinarità, dell'unità della cultura e del riavvicinamento della filosofia alla scienza, nell'ottica di una visione dell'umanesimo comprensiva della scienza.

In questa seconda parte, con riferimento ai tre indirizzi che hanno caratterizzato la sua opera, si cercherà, invece, di delineare il contributo di Federigo Enriques alla matematica, mentre nella terza e ultima parte quello alla filosofia e alla storia della scienza, compatibilmente con i limiti imposti dal carattere della presente Rivista e dallo spazio concesso. Prima, però, giova inquadrare le molteplici relazioni che Enriques seppe mantenere con scienziati e filosofi in Europa, e in particolare con quelli francesi, risultando la Francia il Paese europeo più recettivo del suo pensiero sia come scienziato sia come filosofo e storico della scienza.

6 - Federigo Enriques e l'Europa

Federigo Enriques fu tra i pochi intellettuali italiani del suo tempo a intessere ampi e intensi rapporti culturali con scienziati e filosofi fuori d'Italia. I Paesi stranieri con i quali intrattenne scambi cultu-

Fig. 19 - L'abitazione di Federigo Enriques a Bologna: via D'Azeglio, 57 Fotografia tratta dal libro di Giovanni Enriques, *Via D'azaglio 57*, Bologna, Zanichelli, 1983.

rali sono Francia, Germania, Regno Unito, Belgio, Russia, Svezia. Di essi si trovano testimonianze nella copiosa corrispondenza epistolare che Enriques intrattenne con il cognato e collaboratore Guido Castelnuovo tra il 1894 e il 1905 (Bottazzini, Conte, Gario, 1996).

Fra gli studiosi stranieri coi quali Enriques ebbe scambi culturali sono da ricordare: Henri Poincaré, Emile Picard, Pierre Humbert, Emile Borel, Paul Emile Appell, Jacques Hadamard, Paul Painlevé, Xavier Léon, Emile Meyerson, Héléne Metzger, Henri Berr, André Laland, Henri Bergson, Léon Brunschvicg, Louis Couturat, Edouard Le Roy, Lucien Lévy-Bruhl, Alexandre Koyré, Georges Sarton, Charles Singer, Wilhelm Ostwald, Max Noether, Felix Klein, Ernst Mach, Albert Einstein, Otto Neurath, Franz Brentano, Gösta Mittag-Leffler, Oscar Zarisky.

Fra gli italiani: Giovanni Vailati, Bernardino Varisco, Eugenio Rignano, Vito Volterra, Guido Castelnuovo, Giovanni Gentile, Benedetto Croce, Alessandro Chiappelli, Giovanni Papini, Vittoria Notari Cuzzer, Giuseppe Bruni, Tullio Levi-Civita, Giuseppe Lombardo Radice, Alfonso Sella, Aldo Mieli, Giorgio De Santillana, Francesco Severi, Oscar Chisini, Fabio Conforto, Corrado Segre, Gino Fano, Giovanni Battista, Carlo Emery, Gino Galeotti, Luigi Cremona, Attilio Frajese, Andrea Giardina, Antonio Dionisi, Vilfredo Pareto, Giovanni Vacca, Giuseppe Montalenti, Roberto Almagià.

Con gli scienziati e filosofi francesi, però, ebbe i contatti più intensi e frequenti, privilegiati anche dal fatto che il francese era la seconda lingua madre per Enriques, essendo la madre[22] di origini francofone.

Si è già detto, nella prima parte di questo saggio, del grande numero di suoi lavori pubblicati in francese. Lo stesso Enriques scrive a Xavier Léon: «... noi italiani attribuiamo il valore più alto al pensiero francese col quale – tranne qualche eccezione – ci sentiamo molto più in sintonia che con quello di altri paesi». (Nastasi T., 2012, p. 186). Particolare importanza ebbero i contatti con i matematici francesi Poincaré, Picard, Humbert, Borel, Appell e Léon.[23]

Un segnale chiaro dei diversi orientamenti filosofici e culturali dell'Italia rispetto agli altri Paesi europei è dato dalla diversa partecipazione al III Congresso Internazionale di Filosofia del 1908 ad Heidelberg, suddiviso in sette sezioni: "Storia della filosofia", "Filosofia generale, metafisica e filosofia della natura", "Psicologia", "Logica ed epistemologia", "Etica e sociologia", "Estetica", "Filosofia della religione".

Nel resoconto del Congresso, il filosofo statunitense George Stuart Fullerton (1859-1925) osserva esplicitamente che la sezione dedicata alla "Logica ed epistemologia" aveva avuto la maggior partecipazione di comunicazioni, tanto da esaurirla, mentre quelle dedicate all'"Estetica" e alla "Filosofia della religione" ne avevano avute poche, concludendo che «Logic and epistemology enjoyed the center of attention, and the program of the section devoted to them was always full». Inoltre Fullerton rileva il grande interesse dei tedeschi e dei francesi verso l'epistemologia, e quello degli italiani verso l'etica, la sociologia e la religione:

> «It is worthy of note that Germans and the French seemed especially absorbed in epistemolgical problems, while the Italians showed, on the whole, a greater interest in ethics, sociology and religion».(Nastasi T., 2012, p. 184).

Enriques partecipò al Congresso con una comunicazione della

22 Matilde Coriat, nata in Tunisia e, probabilmente come la sorella Fortunée, bilingue (italiano e francese).

23 Una approfondita analisi delle relazioni culturali di Enriques con gli ambienti filosofico-scientifici della Francia dei primi decenni del secolo XX si trova in (Nastasi T., 1912).

sezione "Logica ed epistemologia", dal titolo *Sul principio di ragion sufficiente,* il cui contenuto sarà da lui successivamente sviluppato nell'articolo *Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica,* (Enriques, 1909 a) che fu molto apprezzato dal chimico e filosofo Emile Meyerson in una lettera del 1 febbraio 1909:

> Caro Signor Enriques, ho appena terminato lo studio del suo lavoro sul Principio di ragione sufficiente e mi affretto a dirle che ha suscitato in me il più profondo interesse. Lei ha trattato il tema fondamentale in modo veramente magistrale; ho appreso enormemente e imparerò ancora, senza dubbio, perché mi propongo di ritornare ancora su questo studio, a tal punto mi paiono importanti le basi da lei poste. Evidentemente, avendo adottato un punto di vista differente dal mio, lei non poteva giungere a conclusioni identiche alle mie, ma i punti di contatto sono numerosi. Le sono particolarmente e molto profondamente riconoscente del modo estremamente amabile con il quale lei ha voluto parlare proprio dei miei sforzi. Venendo da un maestro del suo calibro, questi elogi mi sono infinitamente preziosi (Nastasi T., 2012, p. 189).

Certamente il suo intervento dovette risultare controcorrente rispetto a quelli degli altri italiani e, forse per questo, tanto apprezzato da fruttargli l'incarico di organizzare il IV Congresso Internazionale di Filosofia per il 1911 a Bologna (che si terrà dal 6 all'11 aprile), per il quale, però, Enriques incontrò notevoli difficoltà, superate soprattutto grazie all'aiuto di Xavier Léon, come ampiamente documentato negli scambi epistolari fra i due (Quilici & Ragghianti, 1989). In Italia Croce e i suoi allievi manifestarono la loro ostilità verso il "matematico Enriques" al quale era stato dato "imprudentemente" l'incarico di organizzare e presiedere il Congresso di Bologna, dando più spazio a scienziati che non a filosofi (si noti l'"Enriquez" al posto dell'Enriques usato da Croce):

> Il solo difetto reale dell'organizzazione mi sembra questo: che l'Enriquez ha introdotto nelle conferenze a sezioni riunite troppi scienziati puri, che non sono filosofi.(Lettera del 3 febbraio 1910 di Croce a Gentile).
>
> .

Il sodalizio con Léon fu molto importante per lo sviluppo stesso delle idee di Enriques in campo filosofico. Molte le assonanze fra i due matematici. Léon fondò la "Società Filosofica di Francia" e la «Revue de Métaphysique et de Morale» che richiamano alla memoria la "Società Filosofica Italiana" e la «Rivista di Scienza, organo internazionale di sintesi scientifica» fondate da Enriques nel 1906 e nel 1907. Léon aveva le stesse idee di interdisciplinarità e nutriva gli stessi progetti di sintesi scientifico-filosofica di Enriques, lavorando con André Lalande e un gruppo interdisciplinare di logici, filosofi e scienziati al famoso *Vocabulaire technique et critique de la Philosophie*.

Un altro scienziato francese ebbe un ruolo importante per l'affermazione in Europa di Enriques come storico della scienza: Henri Berr (1863-1954), che nel 1925, a Parigi, aveva creato il "Centre International de Synthèse", con lo scopo di «sviluppare e coordinare le ricerche di scienza pura e di rimediare agli inconvenienti delle specializzazioni troppo spinte». Nelle finalità del Centro di Berr si ritrovano le stesse parole scritte da Enriques nel 1907 nel Programma della «Rivista di Scienza». Le attività del Centro di Berr comprendevano seminari, laboratori e congressi sui fondamenti e sull'unità del sapere, e la pubblicazione di due riviste: «Revue d'Histoire des Sciences» e «Revue de Synthèse».

Fig. 20 - Federigo Enriques in villeggiatura con la famiglia ad Alagna (estate 1907). Fotografia tratta dal libro di Giovanni Enriques, *Via D'azaglio 57*, Bologna, Zanichelli, 1983.

Enriques collaborò ai lavori della sezione di storia della scienza del Centro di Berr, dove ritrovòAldo Mieli (1879-1950) e conobbee Hélène Metzger (1889-1944). La presenza di Enriques nel Centro di Berr era ritenuta importante per i francesi.

Si può asserire che in nessun altra parte d'Europa Enriques trovò un ambiente culturale così consonante e così recettivo delle proprie idee come in Francia,

Un altro personaggio europeo che ebbe importanza per la diffusione in Europa delle idee di Enriques sulla storia della scienza fu il belga George Sarton (1884-1956) con il quale Enriques ebbe svariati contatti nei congressi internazionali di Storia della Scienza.

7 - Federigo Enriques e la matematica

L'evoluzione dell'attività scientifica dell'Enriques nel campo della matematica si sviluppa secondo una linea logico-temporale cha va dallo studio delle curve algebriche alle superficie algebriche, ai fondamenti della Geometria Proiettiva, ai criteri psicologici in aggiunta a quelli logici nella scelta dei postulati della geometria, alla didattica e alla storia della matematica.

La fama di Enriques come epistemologo, in particolare per i suoi studi sui principi della geometria, si diffuse subito in tutta Europa. Il grande matematico Felix Klein, nel 1898, creò la grande *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (*Enciclopedia delle Scienze Matematiche*) e affidò a Enriques (1907 b) la redazione dell'articolo *Prinzipien der Geometrie*, dedicato ai principi della geometria, il quale risulterà una vera e propria monografia sull'argomento.

L'esame critico della genesi dei principi della geometria portò inevitabilmente l'Enriques a sviluppare un forte interesse per la didattica della matematica, specialmente nell'insegnamento secondario, e per lo sviluppo storico del pensiero matematico. A quest'ultimo interesse fu inevitabilmente condotto anche dalla sua visione storicistica dell'attività scientifica in generale di cui fu egli stesso grande protagonista.

Federigo Enriques aveva studiato a Pisa con grandi maestri:

Enrico Betti (1823-1892), Ulisse Dini (1845-1918), Luigi Bianchi (1856 -1928), Vito Volterra (1860-1940) e Riccardo De Paolis (1854-1892).

Ancor prima di laurearsi, nel 1890, pubblica la sua prima memoria scientifica accademica: *Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni* (Enriques, 1890).[24]

Nel 1891 si laurea in matematica con De Paolis, discutendo la tesi: *Alcune proprietà metriche dei complessi di rette ed in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi.* L'anno dopo segue un corso di perfezionamento a Pisa e nel novembre dello stesso anno 1892 viene a Roma per seguire il corso di perfezionamento di Luigi Cremona, che con le "trasformazioni birazionali", che portano il suo nome,[25] aveva introdotto anche in Italia il nuovo indirizzo della geometria algebrica.

Nel periodo del corso di perfezionamento a Roma (1892-1893) Enriques pubblica vari lavori accademici[26] che gli fruttano, al suo completamento, nel 1894, l'incarico dell'insegnamento di geometria proiettiva all'Università di Bologna.

Appena iniziato l'insegnamento si accorge di una lacuna nei fondamenti della geometria proiettiva: il teorema di Staudt, fondamentale per quel ramo della geometria, non aveva il rigore dovuto e ne fornisce subito una dimostrazione perfetta e semplice che inserisce nel suo trattato universitario *Lezioni di geometria proiettiva* (Enriques, 1894 b). Nello stesso anno pubblica pure le sue *Lezioni di geometria descrittiva* (Enriques, 1894 a).

---

24 La prima pubblicazione (non accademica) di F. Enriques è invece del 1885: la *Tavola dei quadrati e dei cubi perfetti interi contenuti in 100000*, Nistri, Pisa, 1885. Fascicolo in 16-esimi di 10 pagine.

25 Le trasformazioni cremoniane generalizzano le omografie, in quanto, ad esempio, nel piano mutano rette non più in rette ma in curve d'ordine superiore. Sono dette "trasformazioni birazionali" poiché a un qualunque punto dello spazio iniziale la trasformazione associa un altro punto dello spazio trasformato le cui coordinate sono funzioni razionali di quelle del punto di partenza.

26 Nel 1892: *Le omografie cicliche negli spazi ad n dimensioni; Le omografie armoniche negli spazi lineari ad n dimensioni.* Nel 1893: *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano; Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières nel piano; Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica; Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche; Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a quattro dimensioni; Ricerche di geometria sulle superficie algebriche; Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in se stesse.*

7.1 - La geometria algebrica

Il metodo delle coordinate introdotto da René Descartes e Pierre de Fermat nella prima metà del secolo XVII stabilisce una corrispondenza biunivoca fra punti del piano (o dello spazio ordinario) e le loro coordinate x,y (o x,y,z), per modo che i punti divengono "immagini geometriche" di coppie (o terne) ordinate di numeri reali, e viceversa queste ultime possono essere intese come rappresentazioni analitiche (numeriche) di punti. Questa semplice corrispondenza biunivoca crea un "ponte" fra geometria e algebra che consente di tradurre un problema geometrico in uno algebrico e viceversa. Infatti, i punti di una curva (o di una superficie), in quanto ad essa appartenenti, sono legati da una relazione geometrica "caratteristica" nel senso che di essa godono tutti e soltanto essi, ovvero costituiscono un luogo geometrico. In virtù del metodo delle coordinate è allora possibile tradurre tale relazione geometrica in una relazione fra le loro coordinate o, meglio, fra le coordinate x,y (o x,y,z) del generico punto della curva (o della superficie) addivenendo, in tal modo, a una equazione indeterminata in due (o tre) incognite. Tale equazione, per il modo stesso in cui è ottenuta, come traduzione algebrica della proprietà geometrica caratteristica della curva (o della superficie), è anch'essa "caratteristica", nel senso che le sue radici sono tutte e soltanto le coordinate dei punti della curva (o della superficie). In tal modo nasce un nuovo tipo di geometria, detta analitica in quanto fa corrispondere ad ogni oggetto geometrico un oggetto algebrico (analitico) e viceversa: a punti corrispondono coppie (o terne) ordinate di numeri reali, a curve equazioni in due incognite x, y, a superfici equazioni in tre incognite x,y,z e viceversa.

Cartesio, con la sua *Géometrié* è considerato, assieme a Pierre de Fermat, il creatore della geometria analitica. Ma in realtà lo scopo per cui scrisse questa opera non era esattamente quello di un moderno trattato di geomeria analitica. La *Géometrié*[27] fu pubblicata nel 1637

27 Probabilmente però Cartesio già dal 1628, o un po' dopo, dovette aver chiare le idee della geometria analitica. Fermat, indipendentemente da Cartesio e con approcci differenti, l'aveva introdotta probabilmente già nel 1629 in manoscritti circolati ma non pubblicati. Nel 1636 Fermat enunciò una proposizione che è il principio fondamentale della geometria

come una delle tre appendici del famoso *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences*, perché con essa intendeva illustrare concretamente il suo metodo filosofico. Cartesio comprese perfettamente la corrispondenza biunivoca fra enti algebrici e geometrici senza privilegiare, come invece noi oggi facciamo con la geometria analitica, l'applicazione dell'algebra alla geometria. La sua *Géometrié* può a pari diritto chiamarsi "geometria analitica" così come all'inverso "algebra geometrica". Egli infatti non aveva mostrato alcuna predilezione nè per l'algebra nè per la geometria, mettendo in evidenza difetti dell'una e dell'altra:

> Accusava la seconda di dipendere eccessivamente da figure che affaticavano inutilmente l'immaginazione e stigmatizzava la prima definendola una tecnica confusa e oscura che ottenebrava la mente (Boyer, 1980, p. 390).

Lo scopo della sua *Géometrié* era soltanto quello di fornire un esempio del suo "metodo delle idee chiare e distinte", liberando l'eccessiva dipendenza della geometria dalle figure con la sua trasduzione in algebra e viceversa ritornando alla geometria con l'interpretazione geometrica delle soluzioni algebriche.

La geometria algebrica sorta nel secolo XIX è un naturale sviluppo della geometria analitica. «Il confine tra geometria analitica e geometria algebrica si attraversa probabilmente quando si passa dallo studio delle coniche a quello delle curve di grado 3. Ciò è stato fatto già nell'antichità: Diofanto (III secolo d. C.) ha studiato le equazioni di grado 3 con due variabili e ha usato alcune trasformazioni che, con terminologia moderna, coincidono con la duplicazione di un punto di una curva cubica considerata come varietà abeliana» (Ciliberto, Shafarevich, 1998, Concetti fondamentali di Igor R. Shafarevich).

La geometria algebrica può essere considerata come il risultato della evoluzione della geometria analitica e della geometria proiettiva, e unisce l'algebra astratta (soprattutto quella commutativa) alla geometria. Infatti, l'oggetto principale di studio della geometria

---

analitica: «Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva». (Boyer, 1990, p. 398) algebrica sono gli "insiemi algebrici" che in particolari condizioni[28] si dicono "varietà algebriche", entità geometriche che possono essere pensate come sottoinsiemi dello spazio a un numero *n* qualunque di dimensioni, definiti come soluzioni comuni a *n* equazioni algebriche (ovvero polinomiali):

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots\ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

essendo f_1, f_2, ...f_n polinomi nelle *n* variabili x_1, x_2, ...x_n.

I polinomi sono presenti nella matematica fin dall'epoca degli antichi matematici greci e nelle ricerche successive fino ai giorni nostri. Da questo punto di vista la geometria algebrica può essere considerata una delle branche più classiche della matematica. Tuttavia, gli inizi del suo sviluppo "moderno", caratterizzato dall'uso sistematico della geometria proiettiva del piano e dello spazio ordinario nello studio di proprietà di oggetti geometrici ed enti algebrici, risalgono, nella prima metà del secolo XIX, ai matematici francesi Gaspard Monge (1746-1818),Charles Julien Brianchon (1783-1864), Michel Chasles (1793–1880), Jean-Victor Poncelet (1788–1867) e ai matematici tedeschi August Ferdinand Moebius (1790-1868), Julius Plücker (1790-1868), Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), Jakob Steiner (1796-1863) e infine Hermann Günther Grassmann (1809-1877).

Le varietà algebriche possono essere definite anche dalle radici di una sola equazione algebrica:

$$f\,(x_1 \ldots\ldots, x_n) = 0$$

e in particolare dalle radici di equazioni in due incognite, che rappresentano curve algebriche:

$$f(x, y) = 0$$

28 Una varietà algebrica è un insieme algebrico irriducibile, ovvero un insieme algebrico che non può essere scritto come unione di due insiemi algebrici più piccoli.

e dalle radici di equazioni in tre incognite, che rappresentano superficie algebriche:

$$f(x,y,z)=0$$

Alcune superficie algebriche del secondo ordine, ovvero definite da equazioni algebriche di secondo grado, sono ben note a tutti: l'ellissoide (figura 21), il paraboloide ellittico (figura 22 A), il paraboloide iperbolico (figura 22 B), l'iperboloide iperbolico (figura 23) e l'iperboloide ellittico (figura 24).

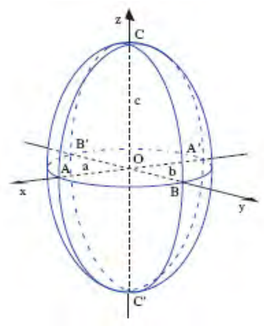

Fig. 21 - Ellissoide oblungo.

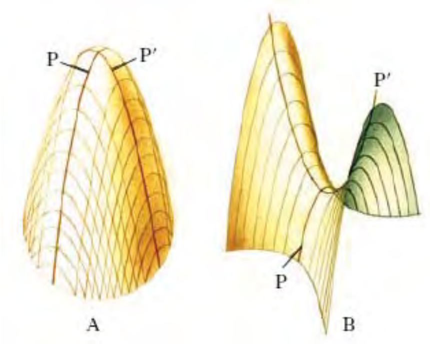

Fig. 22 A - Paraboloide ellittico.
Fig. 22 B - Paraboloide iperbolico.

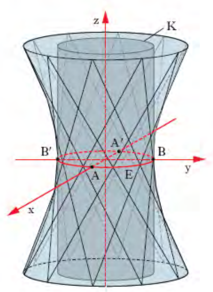

Fig. 23 - Iperboloide iperbolico.

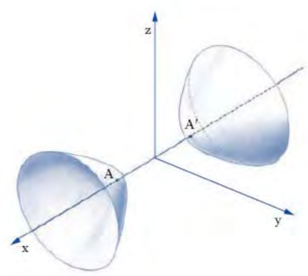

Fig. 24 - Iperboloide ellittico.

Nelle figure 25-28 invece sono riportate alcune celebri superfici algebriche di ordine superiore al secondo, con le relative equazioni. Come si può vedere le forme delle superfici algebriche diventano molto complesse e bizzarre non appena si supera il secondo ordine. Equazioni:

Ellissoide: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Paraboloide: ellittico: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Parabolide iperbolico: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

Iperboloide iperbolico: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Iperboloide ellittico: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Fig. 25 - Superficie algebrica di F. Klein di ordine 3. (Da Le Superfici Algebriche. A project by imaginary.org - Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Roma Tre, sotto la cura del Prof. L. Teresi).

$$x^3+y^3+z^3+0,4^3-(x+y+z+0,4)^3=0$$

Fig. 26 - Superficie algebrica di E. Kummer di ordine 4 scoperta nel 1875. (Da Le Superfici Algebriche. A project by imaginary.org - Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Roma Tre, sotto la cura del Prof. L. Teresi).

$$(x^2+y^2+z^2-(0.5+2\cdot a)^2)^2-3\cdot\frac{(0.5+2\cdot a)^2-1}{3-(0.5+2\cdot a)^2}\cdot(1-z-\sqrt{2}\cdot x)\cdot(1-z+\sqrt{2}\cdot x)\cdot(1+z+\sqrt{2}\cdot y)\cdot(1+z-\sqrt{2}\cdot y)=0$$

La nascita vera e propria e lo sviluppo della moderna geometria algebrica sono però una gloria quasi tutta italiana:

> Gli sviluppi successivi prendono le mosse, all'inizio della seconda metà dell'Ottocento, dalle rivoluzionarie ricerche di B. Riemann da un lato e dall'emergere della figura di L. Cremona, il fondatore della scuola italiana di geometria algebrica, dall'altro. A Cremona si deve il merito di aver affinato i metodi della geometria proiettiva con l'uso di tecniche algebriche raffinate, dando un contributo decisivo alla realizzazione del linguaggio algebrico geometrico universale cui si è dianzi accennato e fondando in tal modo un metodo per la trattazione geometrica dei più svariati problemi algebrici. (Ciliberto, Shafarevich, 1998).

Fig. 27 - Superficie algebrica di H. Hauser, S. Gann e C. Stussak di ordine 6. (Da Le Superfici Algebriche. A project by imaginary.org - Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Roma Tre, sotto la cura del Prof. L. Teresi).

$$(x^2+9/4\cdot y^2+z^2-1)^3-x^2\cdot z^3-9/80\cdot y^2\cdot z^3=0$$

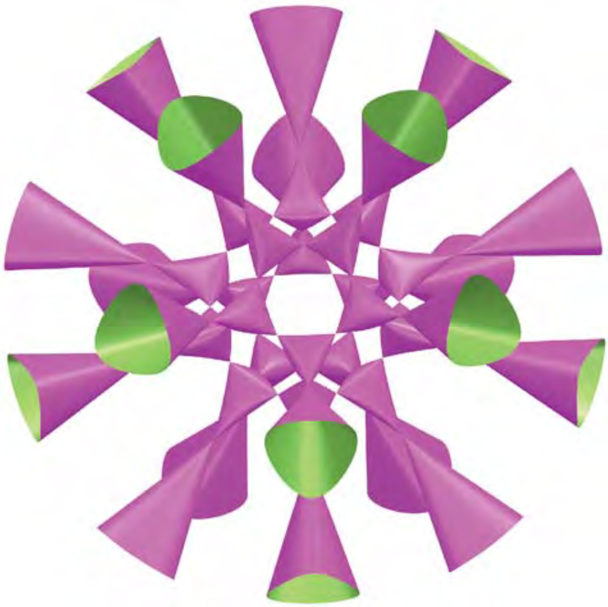

Fig. 28 - Superficie algebrica di W. Barth di ordine 6. (Da Le Superfici Algebriche. A project by imaginary.org - Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Roma Tre, sotto la cura del Prof. L. Teresi).

$$4\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot x^2-y^2\right)\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot y^2-z^2\right)\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\cdot z^2-x^2\right)-\left(1+2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-1\right)^3=0$$

La scuola italiana di geometria algebrica, divenuta famosa in tutto il mondo,[29] fu creata da Luigi Cremona (1830-1903), Eugenio Bertini (1846-1933) e Corrado Segre (1863-1924), ma ricevette un forte impulso soprattutto ad opera di Guido Castelnuovo (1865-1952), Federigo Enriques e Francesco Severi (1879-1961).

Enriques, appena laureato, viene attratto dai nuovi studi geometrici e durante il suo corso di perfezionamento a Roma, nel 1892-1893, si rivolge per avere consigli a Guido Castelnuovo, col quale stringerà subito un rapporto di amicizia che diverrà presto di collaborazione e anche di parentela, avendo Castelnuovo sposato Elbina Enriques, sorella di Federigo.

Così Castelnuovo narra dei primi inconri con Enriques:

29 «Probabilmente il successo più rilevante mai ottenuto in geometria algebrica si deve al lavoro, effettuato tra la fine del XIX secolo e la prima metà del XX, dalla scuola italiana: G. Castelnuovo, F. Enriques, F. Severi e i loro allievi. Essi hanno creato quasi tutta la teoria delle superfici algebriche e le loro idee si sono finora dimostrate fondamentali anche in dimensione più alta» .(Ciliberto, Shafarevich, 1998).

> Venne perciò da me a chiedere consigli. Stavo per suggerirgli la lettura di libri e memorie, ma mi accorsi subito che non sarebbe stata questa la via più conveniente. Federigo Enriques era un mediocre lettore. Nella pagina che aveva sotto gli occhi egli non vedeva ciò che era scritto, ma quel che la sua mente vi proiettava. Adottai quindi un altro metodo: la conversazione. Non già la conversazione davanti a un tavolo col foglio e la penna, ma la conversazione peripatetica.
>
> Cominciarono allora quelle interminabili passeggiate per le vie di Roma, durante le quali la geometria algebrica fu il tema preferito dei nostri discorsi.
>
> Assimilate in breve tempo le conquist;e della scuola italiana nel campo delle curve algebriche, l'Enriques si accinse arditamente a trattare la geometria sopra una superficie algebrica. Egli mi teneva quotidianamente al corrente dei progressi delle sue ricerche, che io sottoponevo ad una critica severa. Non è esagerato affermare che in quelle conversazioni fu costruita la teoria delle superficie algebriche secondo l'indirizzo italiano. (Castelnuovo, 1947).

Quanto fosse rimasta stretta la collaborazione fra i due grandi matematici anche negli anni successivi al periodo romano di perfezionamento dell'Enriques, è testimoniato dal nipote Federico Enriques:

> Le passeggiate matematiche di Castelnuovo ed Enriques mi hanno fatto venire in mente quanto mi raccontò, a pochi mesi dalla morte, Emma Castelnuovo: «Negli anni '20, la famiglia Enriques aveva l'abitudine di fare una visita settimanale alla famiglia Castenuovo (abitavano vicini). In salotto le signore ed i giovani. Guido e Federigo discutevano di matematica nello studio di Guido». La zia Elbina temeva quelle serate, perché Guido non chiudeva occhio tutta la notte ripensando alle cose discusse con Federigo[30]

Ma sentiamo dalle sue stesse parole come Federigo Enriques definiva la geometria algebrica:

> La geometria algebrica - ove confluiscono il metodo delle coordinate e quello delle proiezioni, tutti i diversi ordini di concetti suggeriti dallo studio delle curve - riesce ormai ad una dottrina qualitativa delle equazioni e delle funzioni algebriche, che costituisce il naturale prolungamento dell'Algebra e che vorremmo pur

30 Testimonianza resa dal prof. Federico Enriques tramite una sua e_mail di risposta alla mia richiesta di revisione del presente articolo.


RICERCHE DI GEOMETRIA

SULLE

SUPERFICIE ALGEBRICHE

MEMORIA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

TORINO

CARLO CLAUSEN

1893

Fig. 29 - Federigo Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* (1893).

designare con questo nome, superando la significazione più ristretta che vi attribuiscono gli specialisti (Enriques e Chisini, 1915-1918-1924-1934, prefazione in vol I, pp. VII-XIV).

Il geometra tedesco Max Noether (1844-1921), seguendo Luigi Cremona, studiò le proprietà delle varietà algebriche invarianti per le trasformazioni birazionali (Noether, 1870). Ma la memoria che conteneva tali studi, pur essendo importante, era piuttosto «oscura, dove alcune proprietà erano stabilite con dimostrazioni faticose che non gettavano luce sulla questione, altre erano intuite più che dimostrate. Al contrario l'edifizio di cui l'Enriques tracciò in pochi mesi il disegno, ha i pregi dell'armonia e della spontaneità» (Castelnuovo, 1947).

Prendendo le mosse dagli studi di Noether, Enriques studia a fondo le proprietà dei sistemi lineari di curve algebriche sopra una superficie, definendo, mediante una relazione funzionale, una operazione che permette di passare da un sistema lineare a un altro, detto il sistema aggiunto. Enriques scopre che il residuo di un sistema lineare rispetto al proprio aggiunto non dipende dal sistema di partenza: è invariante di fronte alle trasformazioni birazionali della superficie in un'altra e viene detto "sistema canonico". Dall'esame di questo sistema e dalle relazioni tra un sistema lineare e il proprio aggiunto, Enriques ricava vari e tutti essenziali caratteri invarianti per trasformazioni birazionali, i generi: il genere geometrico p_g, il genere aritmetico p_a, il genere lineare e i plurigeneri. Raccoglie tali risultati nella memoria *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* scritta in pochi mesi, da gennaio a giugno 1893, data in cui viene presentata e subito pubblicata all'Accademia delle Scienze di Torino (Enriques, 1893). In tale memoria è stabilita la teoria generale dei sistemi lineari

Fig. 30 - Federigo Enriques, *Le superficie algebriche.* Opera postuma a cura di Guido Castelnuovo (1949).

di curve sopra le superficie algebriche, che consente di costruire gran parte della geometria sopra di esse. Nel 1896 ne redige una seconda edizione migliorata, dal titolo *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* pubblicata dalla Società Italiana delle Scienze detta dei XL (Enriques, 1896). Come disse Guido Castelnuovo (1947), «salvo lievi aggiunte fatte più tardi, la teoria generale delle superficie algebriche ha in quest'ultimo lavoro un aspetto che è rimasto ormai nella scienza». Una terza trattazione ancor più compiuta viene pubblicata nel 1901 col titolo *Intorno ai fondamenti della Geometria sulle superficie algebriche* (Enriques, 1901).

Non è possibile qui addentrarci sui numerosi e importanti risultati originali ottenuti da Enriques nello studio delle curve e superficie algebriche e più in generale delle varietà algebriche. Oltre lo studio delle proprietà delle superficie algebriche, Enriques svolse, assieme a Castelnuovo, un immane lavoro sistematico di classificazione delle superficie algebriche in relazione ai valori dei generi, che portò avanti fino agli ultimi anni di vita, scoprendo un gran numero di superficie algebriche con proprietà singolari e impreviste.

L'attività di Enriques e Castelnuovo, e poi anche di Severi, in questo settore fu talmente intensa e densa di importanti risultati scientifici, da meritare il riconoscimento a livello internazionale di una vera e propria scuola italiana di geometria algebrica, che annovera altri matematici italiani, molti dei quali furono allievi di Enriques: Giovanni Battista Guccia (1855-1914), Michele De Franchis (1875-1946), Annibale Comessatti (1886-1945), Oscar Chisini (1889-1967), Giacomo Albanese (1890-1948) e Beniamino Segre (1903-1977).

Le ricerche di Enriques in questo settore sono contenute in numerosissime pubblicazioni accademiche che poi riorganizzò, in anni successivi, in vari volumi.

Una prima raccolta delle ricerche enriquesiane sulle superficie algebriche fu curata dall'allievo Oscar Chisini in 4 volumi pubblicati rispettivamente nel 1915, 1918, 1924, 1934 col titolo *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Enriques, Chisini, 1915, 1918, 1924, 1934). Una seconda raccolta fu curata dall'allievo Luigi Campedelli in due volumi, il primo uscito nel 1933 con il titolo *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, raccolte dal Dott. Luigi Campedelli* (Enriques, Campedelli, 1933), e il secondo nel 1934 col titolo *Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero, lezioni raccolte dal Dott. Luigi Campedelli*, nei Rendiconti del Seminario Matematico della Regia Università di Roma (Enriques, Campedelli, 1933). Una terza raccolta degli studi enriquesiani sulla geometria algebrica fu curata dall'allievo Fabio Conforto col titolo *Le superficie razionali* (Enriques, Conforto, 1939). Infine, grazie all'interessamento dei suoi ultimi due allievi Giuseppe Pompily e Alfredo Franchetta, uscì postumo, nel 1949, *Le superficie algebriche* a cura di Guido Castelnuovo (Enriques, 1949), ultima sua opera matematica prima della morte.[31]

7.2 - Intuizione e formalismo. Il rigore matematico. Eclettismo contro purismo. Il metodo induttivo-deduttivo

Enriques, come Poincaré, era un fervido sostenitore dell'intuizionismo in matematica, con una non celata avversione verso il formalismo spinto. Certamente la geometria, che fu il campo delle matematiche a lui più congeniale, era il terreno più adatto per manifestare le sue grandi doti di intuizione. A questo riguardo il pensiero di Enriques è lo stesso di quello del Poincaré, che affermava: «Così la logica e l'intuizione hanno ciascuna la loro parte necessaria, tutte e due sono indispensabili. La logica, che può dare soltanto la cer-

31 Dopo la morte di Enriques furono trovati, per fortuna completati, i manoscritti delle sue ultime due opere pubblicate postume: *Le dottrine di Democrito d'Abdera* per cura di Manlio Mazziotti (1948) e *Le superficie algebriche*, per cura di Guido Castenuovo, A. Franchetta, G. Pompilj (1949).

tezza, è lo strumento della dimostrazione; l'intuizione, lo strumento dell'invenzione». (Poincaré, 1952, pp. 43-44).

A proposito della opportunità didattica di avere una visione intuitiva e geometrica anche di fatti analitici, così si esprimeva Enriques a commento della diffusa incomprensione della matematica anche da parte di uomini intelligenti:

> Della formula $(a - b)^2 = a^2 + b^2 -2ab$ ciascuno acquisterà agevolmente l'intelligenza del significato geometrico, (mentre) se gli venga presentata come espressione astratta di un calcolo algebrico, comunicata da un semplice ripetitore come una regoletta meccanica, solleverà ribellioni non del tutto ingiustificate. (Enriques, 1938 b, p. 171).

Certamente, se si intendono a, b come misure di segmenti, l'interpretazione geometrica della precedente formula del quadrato di un binomio diventa immediata e ne permette una facile memorizzazione: il quadrato costruito sulla differenza di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui segmenti stessi diminuita del doppio del rettangolo avente per lati quei segmenti.

Dalle parole dello stesso Castelnuovo risulta chiaro il metodo di ricerca seguito da lui e dall'Enriques, basato sull'intuizione («Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà») e sulla verifica («mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli»), quasi una replica del metodo sperimentale:

> Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito, per dir così, in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase,

> la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le famiglie di superficie. (Castelnuovo, 1928).

La matematica per Enriques era quella stessa di Galilei, immanente nella natura e non un'astratta arbitraria costruzione del pensiero indipendente dalla realtà fisica. In particolare il matematico livornese rimarca sempre la genesi psicologica dei concetti matematici, riportandola a quei dati sensoriali che invece da altri sono ritenuti ingannevoli (Enriques, 1938 b, p. 145):

> Il significo scientifico delle teorie matematiche ci riporta alla considerazione delle forme immanenti nella natura [...] Respingere le idee che hanno rapporto con l'occhio, o con l'orecchio, o col tatto, vedendo nelle sensazioni non le porte della conoscenza, ma soltanto l'occasione di errori peccaminosi, questo strano pudore dei logici matematici ci richiama alla memoria Plotino e quegli asceti cristiani del Medio Evo che si vergognavano di avere un corpo.

Queste due posizioni antitetiche per la matematica spesso sono etichettate con i termini "fuori di noi" e "dentro di noi", separando drasticamente le rispettive posizioni. Per Enriques, invece, l'immanenza della matematica nella natura non deve essere confusa con un pieno naturalismo matematico, che riconosce l'esistenza di enti matematici indipendentemente dallo spirito umano. Per lui la matematica è una costruzione dello spirito dell'uomo tratta da concetti immanenti nella realtà fisica. La sua posizione risulta in tal modo intermedia fra il kantismo dell'"a priori" e l'empirismo dell'"a posteriori", ovvero anche fra l'idealismo e il positivismo puro. In quest'ottica assume quindi un ruolo primario l'intuizione nella fase di ricerca, assegnando alla logica il compito successivo della dimostrazione e formalizzazione.

La concezione del rigore matematico in Enriques[32] è il «rigore

32 Che è stata anche dei suoi allievi e di molti matematici a lui seguiti nel tempo (mi riferisco in particolar modo a Bruno de Finetti).

concepito come abito di correzione e di critica». È dunque connessa alla sua visione storicistica della scienza, per cui essendo questa sempre e soltanto un «grado di uno sviluppo, così diventa importante di esporre accanto alla verità le vie - spesso diverse - che vi conducono, senza escludere dal confronto dei metodi i procedimenti parziali o imperfetti, ed anzi col preciso intendimento di correggerli e chiarirli l'uno coll'altro, facendo risultare quanto vi sia di manchevole in ogni concezione parziale delle teorie». Il rigore, dunque, come punto di arrivo e non di partenza dell'insegnamento di una teoria matematica, conquista e non precetto "a priori", «culto del rigore formale che - affettando di bandire ogni manchevolezza - talora riesce soltanto a nascondere le vere difficoltà o le cause d'errore». (Enriques, Chisini, 1915-1918-1924-1934, prefazione in vol. I, pp. VII-XIV)

Collegata alla questione del rigore è anche quella delle generalizzazioni in matematica. L'aspirazione ad enunciazioni generali[33] è la caratteristica della matematica ed esse stesse sono il punto di arrivo del metodo induttivo che caratterizza la fase di ricerca movendo da una moltitudine di casi particolari al caso generale che ne costituisce l'astrazione.[34] Tuttavia, se dal punto di vista razionale e teorico il precetto della generalità è certamente valido, molto meno lo è dal punto di vista didattico, poiché «quest'abito ha diminuito l'efficacia propulsiva di ottimi maestri, e merita di essere seriamente contrastato. Giacché in primo luogo, la forma troppo astratta dell'enunciato riesce ad oscurare il vero significato del teorema nascondendone le origini, ed - in secondo luogo - crea nei giovani studiosi la lusinga delle facili generalizzazioni, puramente formali». (Enriques, Chisini, 1915-1918-1924-1934, prefazione in vol. I, pp. VII-XIV).

L'esperienza di ricerca nel campo della geometria algebrica è, per Enriques, una prova della fine dei metodi distinti per i vari rami della matematica propri del purismo a favore dell'utilizzo eclettico di essi:

33 Auspicate da Niels Henrik Abel (1802-1829) che invitava a «porre i problemi nell'aspetto più generale per scoprirne la vera natura».

34 Il "multiconcreto" per Bruno de Finetti.

> ... la nostra epoca ha superato decisamente il purismo delle scuole analitiche e geometriche, traendo da ciascuna gli istrumenti della ricerca; il ravvicinamento dei metodi che risponde al programma eclettico (Clebsch) ha segnato un reale e fecondo progresso. (Enriques, Chisini, 1915-1918-1924-1934, prefazione in vol. I, pp. VII-XIV).
>
> .

Certamente l'eclettismo che contraddistingue lo sviluppo della geometria algebrica è congeniale all'interdisciplinarità e all'idea dell'unità della cultura così radicate nel pensiero enriquesiano. E richiama il fusionismo di Klein, il matematico che più ebbe influenza su Enriques.

Enriques apprezza lo sforzo di John Stuart Mill[35] per affermare l'importanza del metodo induttivo nella scienza, da lui delineato sul modello fornito da John Frederick William Herschel,[36] ma rimprovera a Mill la mancanza di possesso del metodo matematico che gli fa, erroneamente, considerare induzione e deduzione come processi nettamente distinti: «un' analisi approfondita del procedimento di questa scienza [la matematica] gli avrebbe appreso che la deduzione non va necessariamente dal generale al particolare, e che quindi — per questo riguardo — la distinzione tradizionale fra metodo deduttivo e induttivo, manca di fondamento» (Enriques, 1922, p. 236). Infatti «non vi è propriamente una deduzione, procedente dal generale al particolare, da contrapporre all'induzione che sale dal particolare al generale, perché ogni ragionamento procede in realtà, per analogia, dal particolare al particolare: infatti (come già osservava Sesto Empirico contro la logica aristotelica), la maggiore del sillogismo:

tutti gli uomini sono mortali,
Socrate è uomo,
dunque Socrate è mortale,

---

35 (1806-1873) filosofo ed economista britannico, uno dei massimi esponenti del liberalismo e dell'utilitarismo.

36 (1792 –1871) astronomo, matematico e chimico inglese, figlio del grande astronomo William Herschel.

non potrebbe essere ritenuta vera, da chi prima non conoscesse anche la verità della conclusione. E così il sillogismo, lungi dal costituire il tipo elementare del ragionamento, ne offre soltanto lo schema o la pietra di paragone» (Enriques, 1922, p.233).

Inoltre, Enriques fa presente che «le scienze matematiche non riposano affatto, come si dice, sopra verità necessarie, ma soltanto sopra ipotesi e su taluni assiomi che costituiscono generalizzazioni dell' esperienza» (Ibidem).

Tuttavia Enriques riconosce a Mill il merito di avere rivalorizzato il ruolo del processo induttivo nella scienza:

> In conclusione però, la veduta che il Mill riprende da Telesio e da Bacone, che la scienza sia un progresso dal particolare al generale, acquista per tali considerazioni un valore più significativo. Essa porge una rigorosa affermazione del carattere induttivo del sapere, contro il vecchio ideale dell'ordine deduttivo (Enriques, 1922, p.237).

Enriques condivide, invece, l'unificazione della deduzione e dell'induzione in un unico processo d'inferenza già sostenuta da William Stanley Jevons[37] in *The Principles of Science. A Treatise on Logic and scientific Method* (1874):

> La vera unificazione di questi due metodi, cioè la spiegazione loro come momenti subordinati del processo scientifico, è stata offerta da W. Stanley Jevons: un compatriotta del Mill che fu, come lui, cultore delle scienze economiche e sociali, nelle quali tuttavia ha portato (dopo Cournot) il metodo matematico. Jevons descrive appunto il processo d'inferenza ('), distinguendo i quattro momenti dell'osservazione preliminare (che può essere rimpiazzata dalla esperienza a cui mette capo un ragionamento precedente), dell'ipotesi, della deduzione e della verificazione.(Enriques, 1922, pp. 237-238)

Altrove Enriques, (1906, p. 129) precisa cosa intende per ipotesi:

> Poiché in realtà la tappa del ragionamento induttivo che precede la deduzione, non è l'ipotesi enunciata per una misteriosa

37 (1835-1882) economista e logico britannico. Uno dei fondatori della economia neoclassica e della rivoluzione marginalista.

> divinazione dei fatti, ma il concetto, mediante il quale i fatti stessi si suppongono rappresentati, sorgente dalle osservazioni preliminari per un lavoro (spesso inconscio) di associazione e d'astrazione. Ogni concetto, così formato, contiene delle ipotesi, ma queste debbono essere rese esplicite da una critica, che enunci i resultati della visione immaginativa riferentesi ad esso.
>
> […] Contrapponiamo dunque allo schema logico di Jevons uno schema psicologico del ragionamento induttivo comprendente i quattro stadi dell'osservazione preliminare, del concetto che ipoteticamente la rappresenta, della deduzione e della verificazione. Ci avviciniamo così a cogliere nella sua realtà il procedimento di acquisto delle conoscenze, e a spiegarci le misteriose facoltà del genio, a cui si attribuisce il potere divino dell'antiveggenza.

Nella prefazione al primo volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Enriques, Chisini, 1915,1918,1924, 1934) più sinteticamente riafferma il carattere induttivo-deduttivo della scienza:

> ... infine approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, codesta critica oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase d'un processo unico, che sale dal particolare al generale per ridiscendere al particolare.

Ma poiché la deduzione è il metodo dell'esposizione sistematica della scienza, nei trattati tradizionalmente concepiti, e d'altra parte, come appena visto, fa parte di un più ampio processo induttivo-deduttivo che caratterizza la scienza intesa come ricerca, «questo concepimento dinamico del sapere» (il metodo induttivo-deduttivo) si chiede Enriques se «non debba comporre in qualche modo anche l'antitesi tradizionale fra ricerca ed esposizione sistematica, e così fra scienza e storia della scienza» (Ibidem).

Nelle sue opere trattatistiche Enriques dà ampiamente prova di questa possibilità di ricomposizione, utilizzando il metodo induttivo-deduttivo, come lui stesso pone in evidenza nell' introduzione all'ultimo capitolo del suo trattato postumo *Le superficie algebriche* scrivendo:

> Il lettore che abbia seguito gli sviluppi di questo trattato […] può averne ritratto l'impressione che l'autore abbia dato troppo posto ed esempi e casi particolari, lasciandosi in qualche modo guidare dal sentimento di curiosità del naturalista che raccoglie in un museo i più diversi tipi di animali, di piante e di minerali. Ma come il museo riesce a dare un'idea della ricchezza di forme della vita e conduce quindi a problemi generali della biologia, anche la raccolta di esempi, in questo campo delle matematiche, assume un significato essenziale sotto l'aspetto euristico o storico-costruttivo della scienza. (Enriques, 1949, p. 427).

In chiusura mi sembrano molto appropriate queste parole di Bruno de Finetti che sono il miglior omaggio alle idee di Enriques riportate in quest'ultimo paragrafo, tutte riprendendole e rinnovandole con l'autorevolezza e l'affettività tipiche del grande matematico probabilista:

> …la mania del rigore è spesso controproducente. Una dimostrazione ineccepibilmente logica, valida sotto condizioni estremamente generali, è in genere complicata e priva di prospettiva, nascondendo il concetto intuitivo essenziale nella foresta di minuzie occorrenti solo per includere o casi marginali o estensioni smisurate. È certo cosa migliore e più saggia (come diceva Enriques) fare acquisire una visione intuitivamente chiara e insieme logicamente rigorosa dei casi corrispondenti alle condizioni a ciò più idonee. Basterà poi informare, se del caso, e più o meno diffusamente, su cosa continua o non continua a valere sotto condizioni diverse (magari anche indicando – en passant – quella dimostrazione generale che si ritiene controproducente infliggere come punto di partenza).
>
> Certe dimostrazioni lunghe e complicate non aiutano a capire il perché della validità del risultato ma obbligano soltanto ad accettarlo 'obtorto collo'.
>
> Gli esempi al riguardo sarebbero numerosi. Non per dimostrare che si deve o può trascurare il rigore, ma per far riflettere che esso non va considerato 'in vitro', bensì in funzione della formazione nei discenti di una visione corretta, ma anche chiara e intuitiva, delle teorie studiate in astratto e delle loro pratiche applicazioni concrete. In particolare, occorrerebbe sempre curare di rendere le definizioni e dimostrazioni intuitive mediante esempi e controesempi e con espressive illustrazioni mediante figure (ben fatte!). Altrimenti le dimostrazioni si riducono a filastrocche verbali e a sequenze di passaggetti fatti perdendo di vista il filo conduttore (come di chi

> cammini badando ad ogni passo dove mettere il piede, senza alzare lo sguardo per vedere se, proseguendo arriva a una meta, e quale). (de Finetti, Nicotra, 2008, p. 180).

Ringraziamenti

L'autore esprime tutta la sua gratitudine ai proff. Federico e Lorenzo Enriques (nipoti di Federigo) e al prof. Pietro Nastasi per la preziosa revisione dell'articolo.

Bibliografia

BOTTAZZINI Umberto, CONTE Alberto, GARIO Paola (1996), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo,* Torino, Bollati Boringhieri.

BOYER Benjamin Carl (1990). *Storia della matematica*, Milano, Oscar Saggi Mondadori. Trad. it. Adriano Carugo. Ed. originale *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. 1968.

BRIGAGLIA Aldo, CILIBERTO Ciro. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali, in *La Matematica Italiana dopo l'Unità, gli anni tra le due guerre mondiali,* ed. S. di Sieno, A. Guerraggio, P. Nastasi, Marcos y Marcos, 1998, 185-320.

BUSSOTTI Paolo (2006). *Un mediocre lettore: le letture e le idee di Federigo Enriques*, Sarzana, Agorà.

CASTELLANA M. (1991). Enriques interprete di Riemann: geometrie e filosofia. In: *Nucleo filosofico della scienza. 249-272*, Galatina:,Congedo.

CASTELNUOVO Guido (1928). La Geometria Algebrica e la Scuola Italiana in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*. Bologna 3-10 Settembre 1928) , T.I, Zanichelli, Bologna, 1929, pp.191-201.

CASTELNUOVO Guido (1947). *Commemorazione di Federigo Enriques* letta da Guido Castelnuovo nella seduta dell'Accademia Nazionale dei Lincei in data 11 gennaio 1947. Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, volume II (1947), 3-21.

CILIBERTO Ciro. (1997). *Attualità dei contributi di Federigo Enriques alla geometria algebrica*. Preprint-.

CILIBERTO Ciro, SHAFAREVICH Igor R. (1998). Geometria algebrica. *Enciclopedia del Novecento II Supplemento*, http://www.treccani.it/enciclopedia/geometria-algebrica_%28Enciclopedia-del-Novecento%29/

de FINETTI Fulvia, NICOTRA Luca (2008). *Bruno de Finetti: un matematico scomodo*, Livorno, Belforte.

ENRIQUES Federigo (1890). Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni, *Rend. Acc. Lincei* (4), VI2 , 1890, p.63).

ENRIQUES Federigo (1893). *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, Torino, Carlo Clausen libraio della Reale Accademia delle Scienze di Torino.

ENRIQUES Federigo (1894 a). *Lezioni di geometria descrittiva*, Bologna, (litografato) 1893-94.

ENRIQUES Federigo (1894 b). *Lezioni di geometria proiettiva*, a cura di C. Pedretti, (litografato) Bologna 1893-94.

ENRIQUES Federigo (1896). *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*. Roma, "Società Italiana delle Scienze detta dei XL" (s III) X (1896), pp. 1-81.

ENRIQUES Federigo (1901). *Intorno ai fondamenti della Geometria sulle superficie algebriche,* in Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino.

ENRIQUES Federigo (1907 b). Prinzipien der Geometrie, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, Heft I* (1907), pp.1-129.

ENRIQUES Federigo (1909a). Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica, «Rivista di Scienza», 5, 1909, pp. 1-20.

ENRIQUES Federigo, CHISINI Oscar (1915-1918-1924-1934). *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, in 4 voll., Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES Federigo, CAMPEDELLI Luigi (1933). *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, raccolte dal Dott. Luigi Campedelli,* Padova, in ed. litografica casa editrice Cedam.

ENRIQUES Federigo, CAMPEDELLI Luigi (1934). *Sulla classificazione delle superficie algebriche, particolarmente di genere zero, lezioni raccolte dal Dott. Luigi Campedelli"*, nei Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma.

ENRIQUES Federigo (cur. Attilio Frajese) (1938 b). *Le Matematiche nella storia e nella cultura*. Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES, Federigo, CONFORTO, Fabio (1939). *Le superficie razionali,* Bologna, Zanichelli. [Testo pubblicato con la sola indicazione del nome di F. Conforto in seguito all'introduzione delle leggi razziali].

ENRIQUES Federigo (cur. M. Mazziotti) (1948). *Le dottrine di Democrito d'Abdera, testi e commenti*, Bologna, Zanichelli.

ENRIQUES Federigo (cur. Guido Castelnuovo, A. Franchetta e G. Pompily) (1949). *Le superficie algebriche*, Bologna, Zanichelli.

GEYMONAT Ludovico (1976). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. 7 volumi, Milano, Garzanti.

MANARA Carlo Felice (1982). Il contributo di Enriques alla matematica contemporanea. In: *Federigo Enriques*. 25-42, Livorno, Belforte.

NASTASI Pietro (1998). La matematica italiana dal manifesto degli intellettuali fascisti alle leggi razziali. In *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A — La Matematica nella Società e nella Cultur*a (1998), n.3, p. 317–345. Unione Matematica Italiana. http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_2006_8_9A_3-2_P11_0

NASTASI Pietro (2004). Considerazioni tumultuarie su Federigo Enriques, In: *Intorno a Enriques.* 79-204; Sarzana: Agorà. Appendice I: Lettere di Francesco Severi a Vito Volterra, Archivio Accademia dei Lincei, Fondo Volterra; a 182-185: Appendice II: Lettere di Roberto Marcolongo a Tullio Levi-Civita, Archivio Academia dei Lincei, Fondo Levi-Civita; a 186-204: Appendice III: Carteggio riservato (1922-1940), busta 62, Severi Francesco, Archivio centrale dello Stato, Segreteria particolare del Duce.

NASTASI Tina (2012). Dell'Enriques francese, in Charles Alunni e Yves André (cur.), *Federigo Enriques o le armonie nascoste,* pp. 175-196, Pisa, Edizioni della Normale.

NOETHER Max (1870). Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. In *Mathematische Annalen vol. II.*

NURZIA, L. (1979). Relazioni tra le concezioni geometriche di Federigo Enriques e la matematica intuizionista tedesca, *Physis: Rivista Internazionale di Storia della Scienza 1979, 21: 157-193.*

POLIZZI Gaspare. (1982). Enriques e l'epistemologia francese fra Ottocento e Novecento. In: *Federigo Enriques. 107-122;* Livorno: Belforte.

POINCARÈ Henry (1952). *Il valore della scienza*. Firenze, La Nuova

Italia.

QUILICI, L. , RAGGHIANTI R. (cur.) (1989). Lettere di Federigo Enriques, in *Il carteggio Xavier Léon: corrispondenti italiani con un'appendice di lettere di Georges Sorel*, «Giornale critico della filosofia italiana», s. VI, 9, 1989, pp. 308-28.

ArteScienza

Rivista telematica semestrale
http://www.assculturale-arte-scienza.it
Direttore Responsabile: Luca Nicotra
Direttori onorari: Giordano Bruno, Pietro Nastasi
Registrazione n.194/2014 del 23 luglio 2014 Tribunale di Roma
ISSN on-line 2385-1961
Proprietà dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza"